



תרגיל 10 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. (א) הוכיחו כי הפונקציה $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $h(x) = x + e^x$ היא הפיכה, וחשבו את $(h^{-1})'(1)$.
 (ב) הוכיחו כי הפונקציה $h: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $h(x) = \tan x + \arctan x$ היא הפיכה. יהי $c \in \mathbb{R}$ כך ש $h(c) = 1$. חשבו את $(h^{-1})'(1)$. (התשובה תהיה תלויה ב c)

2. הוכיחו את אי-השוויונות הבאים:

(א) $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$.

(ב) $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ בקטע $(0, 1)$.

(ג) $px^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$ עבור $p > 1$ ו- $0 < y < x$.

(ד) $|\tan x - \tan y| \leq 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

3. תהא f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0, 2]$. נניח כי $f(0) = 0, f(1) = 2$ ו- $f(2) = 4$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in (0, 2)$ כך ש $f''(x_0) = 0$.

4. הוכיחו כי למשוואה $x^{10} + x^4 + 2x^2 = 18$ קיימים בדיוק שני פתרונות ב- \mathbb{R} .

5. קבעו את תחומי הגזירות של הפונקציות הבאות וחשבו את נגזרתן:

(א) $f(x) = x|x|$ (ב) $f(x) = |\sin(x^3)|$ (ג) $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$

6. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xa^x}{a^x - 1}$ כאשר $a > 0$ ו- $a \neq 1$.

(ב) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{e^{3x} - 3x - 1}$ (ד) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ (ו) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

(ג) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln x}$ (ה) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right)$ (ז) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

7. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את פולינום טיילור מסדר n סביב הנקודה x_0 :

(א) $x_0 = 1, n = 2, f(x) = \sqrt{x}$ (ג) $x_0 = 0, n = 4, f(x) = \ln(\cos x)$

(ב) $x_0 = 1, n = 3, f(x) = x^x - 1$

8. הפונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות בקטע $[0, 1]$ ומקיימת $f(0) = f(1) = 0$. ידוע כי $|f''(x)| \leq A$ לכל $x \in (0, 1)$. הוכיחו כי לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

9. העזרו בפיתוח טיילור כדי לקרב את המספרים הבאים ברמת דיוק של 10^{-4} :

(א) $\sin\left(\frac{1}{3}\right)$ (ב) $\ln(1.05)$ (ג) $\sqrt{24}$