תרגיל 1

פתרונות מלקח"ם

1) א)

$|x-2|\le 5$

$-5\le x-2\le 5$

$\boxed{-3\le x\le 7}$

$\boxed{\{x\in\mathbb{R} \mid x\in[-3,7]\}}$

ב)

$1<|y-6|$

$y-6>1$ או $y-6<-1$

$\boxed{y>7 \quad \text{או} \quad y<5}$

$\boxed{\{y\in\mathbb{R} \mid y\in((-\infty,5)\cup(7,+\infty))\}}$

ג)

$|x+5|+|x+7|>1$

או

$\begin{cases} x<-7 \\ -x-5-x-7>1 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-7 \\ -2x>13 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-7 \\ x<-6.5 \end{cases}$

$\underline{x<-7}$

או

$\begin{cases} -7\le x\le -5 \\ -x-5+x+7>1 \end{cases}$

$\begin{cases} -7\le x\le -5 \\ 2>1 \end{cases}$ נכון לכל $x\in\mathbb{R}$

$\underline{-7\le x\le -5}$

או

$\begin{cases} x>-5 \\ x+5+x+7>1 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-5 \\ 2x>-11 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-5 \\ x>-5.5 \end{cases}$

$\underline{x>-5}$

$\boxed{x\in\mathbb{R}}$

2) א)

נתון: $a,b\in(c,d)$, $c<d$. מכאן

$a<d$ (1), $c<b$

$b<d$ (2), $c<a$

מ-(1) נקבל:

$a<d \Longrightarrow a-b<d-b$ (1.1) (כלל ה חיבור)

$c<b \Longrightarrow -c>-b \Longrightarrow d-c>d-b$ (1.2) (כלל וחיבור)

לפי תכונת הטרנזיטיביות מקבלים מ-(1.1), (1.2)

(*) $a-b<d-c$

מ-(2) נקבל:

$b<d \Longrightarrow b-a<d-a$ (2.1) (כלל וחיבור)

$c<a \Longrightarrow -c>-a \Longrightarrow d-c>d-a$ (2.2) (כלל וחיבור)

לפי תכונת הטרנזיטיביות מקבלים מ-(2.1), (2.2)

(**) $b-a<d-c$

מ-(*), (**) נובע כי $|a-b|<d-c$ מ.ש.ל.

הטענה נכונה.

ב

נבחר $a=0.8$, $b=0.9$. עבור a, b שבחרנו מתקיים $0<a<b<1$.

אבל $a+b=0.8+0.9=1.7>1 \Leftarrow$ ... $\Rightarrow a+b>1$

הטענה אינה נכונה.

ג

נבחר $a=5$, $b=1$, $c=6$, $d=2$.

עבור ערכים שבחרנו מתקיים: $0<a<c$, $0<b<d$

אבל $\frac{c}{d}=\frac{6}{2}=3$, $\frac{a}{b}=\frac{5}{1}=5$, לכן $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

הטענה אינה נכונה.

ד

נתון: $0<a<c$, $0<d<b$

$$0<d<b \Rightarrow \frac{1}{d}>\frac{1}{b}>0$$

$0<a<c$, $\frac{1}{b}>0$, לכן $\frac{a}{b}<\frac{c}{b}$ (1) (כלל הכפל)

$\frac{1}{d}>\frac{1}{b}>0$, $c>0$, לכן $\frac{c}{d}>\frac{c}{b}$ (2) (כלל הכפל)

מ-(1), (2) נובע על-פי כלל הטרנזיטיביות: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. מ.ש.ל.

הטענה נכונה.

3 א

יש להוכיח כי לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים $|x_1+x_2+\dots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$ (אי-שוויון המשולש). נוכיח זאת בשיטת אינדוקציה מתמטית.

עבור $n=1$ נבדוק את הטענה: $|x_1|\le|x_1|$ נכון.

הטענה מתקיימת עבור $n=1$.

נבדוק את הטענה עבור $n=2$:

$$\begin{cases} -|x_1|\le x_1\le|x_1| \\ -|x_2|\le x_2\le|x_2| \end{cases} \Rightarrow -(|x_1|+|x_2|)\le x_1+x_2\le|x_1|+|x_2|$$ (חיבור אי-שוויונות)

מכאן $|x_1+x_2|\le \underbrace{|x_1|+|x_2|}_{\text{מס חיובי}}$

הטענה מתקיימת עבור $n=2$.

נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k$.

$$|x_1+x_2+\cdots+x_k| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$$

ונוכיח את הטענה עבור $n=k+1$:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|$$

הוכחה:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}| = |(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}| \le$$

אי-שוויון המשולש עבור $n=2$ (הוכח)

$$\le |x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}| \le$$

$$\le |x_1|+|x_2|+|x_3|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|$$

על-פי הנחת האינדוקציה

הוכחנו את מה שנדרש.
הטענה נכונה לכל n טבעי על-פי אקסיומת האינדוקציה.

ב) עלינו להוכיח: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $|a-b|\ge ||a|-|b||$.

הוכחה:

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b| \implies |a-b| \ge |a|-|b| \quad (1)$$

אי-שוויון המשולש

$$|b| = |(b-a)+a| \le |b-a|+|a| \implies |b-a|=|a-b| \ge |b|-|a| \quad (2)$$

אי-שוויון המשולש

מ-(1), (2) נובע כי $|a-b|\ge ||a|-|b||$

4) א)

$$|ab-a_0b_0| = |ab-ab_0+ab_0-a_0b_0| \le |ab-ab_0|+|ab_0-a_0b_0| =$$

הוספה באפס (הגדרה) אי-שוויון המשולש

$$=|a(b-b_0)|+|b_0(a-a_0)| \underset{\substack{|xy|=|x|\cdot|y| \\ \forall x,y\in\mathbb{R}}}{=} |a|\cdot|b-b_0|+|b_0|\cdot|a-a_0|$$

כלומר הוכחנו:

$$\forall a,a_0,b,b_0\in\mathbb{R}$$
$$|ab-a_0b_0|\le|a|\cdot|b-b_0|+|b_0|\cdot|a-a_0|$$

ב) נסמן באמצעות a את אורך החדר, באמצעות b את רוחב החדר.
נסמן באמצעות a_0 את האורך הנמדד של החדר ובאמצעות b_0 את הרוחב הנמדד של החדר.
על-פי הנתונים:

$a=|a|\le 10$, $b=|b|\le 10$, $a_0=|a_0|\le 10$, $b_0=|b_0|\le 10$.

$|a-a_0|<0.01$ $\quad$ $|b-b_0|<0.01$ $\quad(*)$

השטח האמיתי של החדר הוא $S=ab$.
השטח שהתקבל מהמדידות הוא $S_0=a_0b_0$.
נעריך את השגיאה:

$$|S-S_0|=|ab-a_0b_0| \underset{\text{על-פי אי-שוויון שהוכח בסעיף (א)}}{\le} |a|\cdot|b-b_0|+|b_0|\cdot|a-a_0| \underset{\text{על-פי }(*)}{<}$$

$$<10\cdot 0.01+10\cdot 0.01=0.2 \implies \boxed{|S-S_0|<0.2}$$

השגיאה המקסימלית של הערכה של השטח שהתקבל באמצעות המדידות היא 0.2

5 א) נתון: $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$.
נגדיר: $A(a,b)=\frac{a+b}{2}$, $G(a,b)=\sqrt{ab}$, $H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

צ"ל: $G(a,b)\le A(a,b)$ $(*)$. אחר כך נוכיח כי $H(a,b)\le G(a,b)$.

נפעיל את אי-השוויון $(*)$ על המספרים החיוביים $\frac{1}{a}$ ו-$\frac{1}{b}$ $\left(\forall a>0,b>0 \text{ מתקיים}\right)$
כלומר, $G\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)\le A\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$ $\Leftarrow$ $\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\le\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{ab}} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$. נהפוך את אי-השוויון:

$\sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Longrightarrow G(a,b) \ge H(a,b)$.מ.ש.ל.

ב (*) נסמן באמצעות S את הדרך ובאמצעות t את זמן הנסיעה.
נכניס את הנתונים ואת הסימונים לטבלה:

	מהירות	זמן	דרך
מחצית I של המרחק	a	$\frac{S}{2a}$	$\frac{S}{2}$
מחצית II של המרחק	b	$\frac{S}{2b}$	$\frac{S}{2}$

המהירות הממוצעת היא:

$$\boxed{V_1} = \frac{\cancel{a}\cdot\frac{S}{2\cancel{a}}+\cancel{b}\cdot\frac{S}{2\cancel{b}}}{\frac{S}{2a}+\frac{S}{2b}} = \frac{\cancel{S}}{\frac{\cancel{S}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \boxed{H(a,b)}$$

סיום מסעיף א' של השאלה

(**) נמלא את הטבלה לפי הנתונים של השאלה:

	מהירות	זמן	דרך
מחצית I של הזמן	a	$\frac{t}{2}$	$\frac{ta}{2}$
מחצית II של הזמן	b	$\frac{t}{2}$	$\frac{tb}{2}$

המהירות הממוצעת היא:

$$\boxed{V_2} = \frac{a\cdot\frac{t}{2}+b\cdot\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}} = \frac{\frac{\cancel{t}}{2}(a+b)}{\cancel{t}} = \frac{a+b}{2} = \boxed{A(a,b)}$$

סיום מסעיף ב' של השאלה

אם נוסעים מחצית המרחק במהירות a ובמחצית השנייה במהירות b, המהירות הממוצעת היא הממוצע ההרמוני של a ו-b.
אם נוסעים מחצית הזמן במהירות a, ובמחצית השנייה במהירות b, המהירות הממוצעת היא הממוצע החשבוני של a ו-b.

6) נסמן את מימדי התיבה בעזרת x, y, z (בסנטימטרים)
אך לפי הנתונים $x+y+z \le 158$.

נפח התיבה הוא $V=xyz$.

$x>0$, $y>0$, $z>0$, לכן לפי אי-שוויון הממוצעים מתקיים:

$\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$. מכאן $xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27}$

$$V=xyz \le \frac{(1.58)^3}{27} \approx 0.14609 \approx 146$$

ליטר מטר מעוקב

$\boxed{\text{הנפח המקסימלי של התיבה הוא (בערך) 146 ליטר.}}$

7) ב) עלינו להוכיח: $(1+a)^n \ge 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \qquad \forall a>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

נוכיח בעזרת אינדוקציה מתמטית:

נבדוק את הטענה עבור $n=1$: $1+a \ge 1+a$ נכון.

הטענה מתקיימת עבור $n=1$.

נניח כי עבור $n=k$ מתקיים:

$$(1+a)^k \ge 1+ka+\frac{k(k-1)}{2}a^2$$

ונוכיח כי עבור $n=k+1$ מתקיים:

$$(1+a)^{k+1} \ge 1+(k+1)a+\frac{(k+1)k}{2}a^2$$

הוכחה:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \underset{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}{\ge} (1+a)\left(1+ka+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right) =$$

$$=1+\underline{ka}+\frac{k^2-k}{2}a^2+\underline{a}+ka^2+\frac{k(k-1)}{2}a^3 =$$

$$=1+(k+1)a+\frac{k^2-k+2k}{2}a^2+\frac{k(k-1)}{2}a^3 = 1+(k+1)a+\frac{k(k+1)}{2}a^2+\underbrace{\frac{k(k-1)}{2}a^3}_{\substack{\text{מספר אי-שלילי} \\ \forall k\in\mathbb{N} \\ \forall a>0}}$$

$$\ge 1+(k+1)a+\frac{k(k+1)}{2}a^2$$

מ.ש.ל.

הטענה נכונה לכל n טבעי על-פי עקרון האינדוקציה.

ב) עלינו להוכיח:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(הבינום של ניוטון)

תחילה נוכיח טענת עזר:

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ 0 \le k \le n-1$.

הוכחה:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

מ.ש.ל.

עכשיו נוכיח את הטענה בעזרת אינדוקציה מתמטית:

נבדוק את הטענה עבור $n=1$:

$$a+b \overset{?}{=} \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$

$$a+b = a+b$$

הטענה מתקיימת עבור $n=1$:

נניח כי עבור $n=m$ מתקיים:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

ונוכיח כי עבור $n=m+1$ מתקיים:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}$$

הוכחה:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m \overset{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k}}_{I} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k+1}}_{II} \qquad (1)$$

סכום I ניתן לפרק בצורה כזאת:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \underbrace{\binom{m}{m}}_{=1} a^{m+1} b^0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^k b^{m-k+1} + \underbrace{\binom{m+1}{m+1}}_{=1} a^{m+1} b^0 \quad (2)$$

סכום II ניתן להציג בצורה כזאת:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} = \underbrace{\binom{m}{0}}_{=1} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} =$$

$$= \underbrace{\binom{m+1}{0}}_{=1} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k+1} \quad (3)$$

נחזור לחישוב (1) ונציב את (2) ו-(3):

$$(a+b)^{m+1} = \underbrace{\binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k+1}}_{\text{סכום II}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^k b^{m-k+1} + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0}_{\text{סכום I}} =$$

נאחד את שני הסיגמאות:

$$= \binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a^k b^{m-k+1} \left(\underbrace{\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}}_{=\binom{m+1}{k}}\right) + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0 =$$

(לפי טענת עזר)

$$= \binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^k b^{m-k+1} + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}$$

מ.ש.ל.

הטענה נכונה לכל n טבעי לפי אקסיומת האינדוקציה.