תרגיל 2 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. תהא A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים חיוביים. נגדיר $\frac{1}{A}=\left\{\frac{1}{a}:a\in A\right\}$. הוכיחו:

(א) אם $\inf(A)>0$ אז $\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}$.

(ב) אם $\inf(A)=0$ אז $\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\infty$.

<u>פתרון:</u>

תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים חיוביים. נגדיר קבוצה $\frac{1}{A}=\{\frac{1}{a},a\in A\}$

(א) נסמן $infA=m>0$ ונוכיח כי $sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{infA}=\frac{1}{m}$. מכך ש- $infA=m$, נקבל כי לכל $a\in A$ מתקיים $a\geq m \Leftarrow \frac{1}{a}\leq\frac{1}{m}$ לכל $\frac{1}{a}\in\frac{1}{A}$, כלומר $\frac{1}{m}$ הוא חסם מלעיל של $\frac{1}{A}$. בנוסף, לכל $\epsilon>0$ קיים $a^*\in A$ כך ש- $a^*<m+\epsilon$ ולכן

$$\frac{1}{a^*}>\frac{1}{m+\epsilon}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+\epsilon}-\frac{1}{m}=\frac{1}{m}-\frac{\epsilon}{(m+\epsilon)m}$$

מכוויון ש- $\frac{\epsilon}{(m+\epsilon)m}$ ניתן להקטין כמה שנרצה, נקבל כי $\frac{1}{m}=sup\left(\frac{1}{A}\right)$.

(ב) נניח עכשיו כי $infA=0$. לכל $M>0$ ניתן לקחת $\epsilon=\frac{1}{M}$ ואז קיים $a_1\in A$ כך ש- $a_1<\epsilon=\frac{1}{M}$ $\Leftarrow$ $M=\frac{1}{\epsilon}>\frac{1}{a_1}$. מכאן הקבוצה $\frac{1}{A}$ אינה חסומה מלעיל, כלומר $sup\left(\frac{1}{A}\right)=+\infty$.

2. תהיינה A, B קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים. הוכיחו כי $\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}$.

<u>פתרון:</u>

נניח קודם כי הקבוצות חסומות מלעיל. נסמן $supA=M_1, supB=M_2$. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $M_1\leq M_2$. אזי לכל $x\in A\cup B$ מתקיים $x\leq M_2$. בנוסף, לכל $\epsilon>0$ קיים $b^*\in B$ כך ש- $b^*>M_2-\epsilon$. ברור כי $b^*\in A\cup B$. כלומר קיבלנו כי מתקיים

$$sup(A\cup B)=M_2=max\{M_1,M_2\}=max\{supA,supB\}$$

אם A או B אינן חסומות מלעיל, אז גם $A\cup B$ אינה חסומה מלעיל. במקרה זה $sup(A\cup B)=+\infty$ ועבור c ממשי מתקיים

$$max\{+\infty,c\}=max\{+\infty,+\infty\}=+\infty$$

כלומר מתקבל השיוויון הדרוש.

3. בכל הסעיפים הבאים מצאו את הסופרמום, האינפימום ובמידה וקיימים גם מינימום ומקסימום של הקבוצות הנתונות. יש לנמק את התשובה!

(א) $A=\left\{\frac{1}{n}:2021\leq n\in\mathbb{N}\right\}$

(ב) $A=\left\{\frac{m}{m+n}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$

(ג) $A=\left\{\frac{mn}{4m^2+n^2}:m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

(ד) $A=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

(ה) $A=\left\{\sqrt{n^2+1}-\left\lfloor\sqrt{n^2+1}\right\rfloor:n\in\mathbb{N}\right\}$

(ו) $A=\left\{\frac{a}{b}:a,b\in(0,1)\right\}$

<u>פתרון:</u> (א)

$A=\left\{\frac{1}{n} \mid 2021\leq n\in\mathbb{N}\right\}$.

נטען כי $\inf A=0$. ברור כי $\frac{1}{n}>0$ לכל $2021\leq n\in\mathbb{N}$ ולכן 0 חסם מלרע. יהי $0<\varepsilon$. אז קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $N_1>\frac{1}{\varepsilon}$. נגדיר $N=\max\{2021,N_1\}$. אז $\frac{1}{N}\in A$ וגם $\frac{1}{N}<\varepsilon$. אז 0 הוא אינפימום. מכיוון ש- $0\notin A$ נקבל כי אין מינימום.

נטען כי $\frac{1}{2021}=\max A=\sup A$. ברור כי $\frac{1}{2021}\in A$ וגם כי $a\leq\frac{1}{2021}$ לכל $a\in A$. אז $\max A=\frac{1}{2021}$. כמובן שנקבל כי הוא גם סופרמום.

(ב)

מכך שלכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$0<\frac{m}{m+(n+1)}<\frac{m}{m+n}<\frac{(m+1)}{(m+1)+n}<1$$

נובע שאין בקבוצה איבר מינימלי או מקסימלי והיא חסומה ע"י 0 ו־1. אם עכשיו נבחר $\epsilon>0$ כלשהו, אז מספיק לקחת $n>\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ ונקבל כי קיים איבר מהצורה $a=\frac{1}{1+n}$ כך ש־ $a=\frac{1}{1+n}<\epsilon$. מכאן $\inf A=0$.
בנוסף, אם נקח $m>\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ אזי נקבל כי קיים איבר מהצורה $a^*=\frac{m}{m+1}$ כך ש־ $a^*=\frac{m}{m+1}>1-\epsilon$.
מזה נובע כי $\sup A=1$.

(ג)

מכך ש־ $(2m-n)^2\geq 0 \Leftarrow 4m^2+n^2\geq 4mn \Leftarrow \frac{1}{4}\geq\frac{mn}{4m^2+n^2}$ ועבור $n=2m$ מתקבל השיוויון, נובע כי $\sup B=\max B=\frac{1}{4}$. מכך ש־ $(2m+n)^2\geq 0 \Leftarrow 4m^2+n^2\geq -4mn \Leftarrow -\frac{1}{4}\leq\frac{mn}{4m^2+n^2}$ ועבור $n=-2m$ מתקבל השיוויון, נובע כי $\inf B=\min B=-\frac{1}{4}$.

(ד)

$A=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \mid 2021\leq n\in\mathbb{N}\right\}$.

נשים לב כי לפי הזהות ברמז נקבל $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

נטען כי $\inf A=0$. ברור כי $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>0$ לכל $2021\leq n\in\mathbb{N}$ ולכן 0 חסם מלרע. יהי $0<\varepsilon$. אז קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $N_1>\frac{1}{\varepsilon^2}$, כלומר $\sqrt{N_1}>\frac{1}{\varepsilon}$. נגדיר $N=\max\{2021,N_1\}$. אז $\frac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}\in A$ וגם $\frac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}<\frac{1}{\sqrt{N}}\leq\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}}=\varepsilon$.

אז 0 הוא אינפימום. מכיוון ש- $0\notin A$ נקבל כי אין מינימום.

נטען כי $\sup A=\max A=\dfrac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}$. ברור כי

$\dfrac{1}{\sqrt{2021+1}+\sqrt{2021}}=\dfrac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}\in A$. נשים לב כי עבור $n_1>n_2>0$ נקבל

$\sqrt{n_1}>\sqrt{n_2}$, $n_1+1>n_2+1$ ולכן $\sqrt{n_1+1}>\sqrt{n_2+1}$. מכך נובע כי

$\sqrt{n_1+1}+\sqrt{n_1}>\sqrt{n_2+1}+\sqrt{n_2}$ ולכן $\dfrac{1}{\sqrt{n_1+1}+\sqrt{n_1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n_2+1}+\sqrt{n_2}}$. אז בהכרח מתקיים

$\dfrac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ לכל $2021\leq n\in\mathbb{N}$, ולכן $\max A=\dfrac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}$.

כמובן שנקבל כי הוא גם סופרמום.

(ה)

ברור כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2}\Rightarrow n<\sqrt{n^2+1}<n+1\Rightarrow[\sqrt{n^2+1}]=n$$

(ו)

$A=\left\{\dfrac{a}{b}\mid a,b\in(0,1)\right\}$.

נטען $\inf A=0$. מכיוון שעבור כל $\dfrac{a}{b}\in A$ מתקיים $a,b>0$ ולכן $\dfrac{a}{b}>0$, נקבל כי 0 הוא אכן

חסם מלרע. יהי $0<\varepsilon$. אז קיים $1\leq N\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $N>\dfrac{1}{\varepsilon}$, כלומר $\dfrac{1}{N}<\varepsilon$ ולכן עבור

$a=\dfrac{1}{2N}\in(0,1)$, $b=\dfrac{1}{2}\in(0,1)$ נקבל $\dfrac{a}{b}\in A$ וגם $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{1}{2N}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{N}<\varepsilon$, כלומר התנאים

להגדרה השקולה של אינפימום מתקיימים.

נטען כי לא קיים סופרמום. נניח בשלילה שקיים חסם מלעיל $r>0$ כלשהו (לפי משפט ארכימדס אפשר להניח כי r הוא מספר טבעי, אם כי זה לא משפיע על המשך הפתרון), אז בהכרח $r\geq 2$

(משום שעבור $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{4}$ נקבל $\dfrac{a}{b}=2$) ולכן $\dfrac{1}{r}<1$.

עבור $a=\dfrac{1}{2}\in(0,1)$, $b=\dfrac{1}{4r}\in(0,1)$ נקבל $\dfrac{a}{b}\in A$ וגם $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4r}}=2r>r$, וזו סתירה לכך

שהוא חסם מלעיל. אז לא קיים חסם מלעיל לקבוצה ולכן בפרט לא קיים סופרמום.

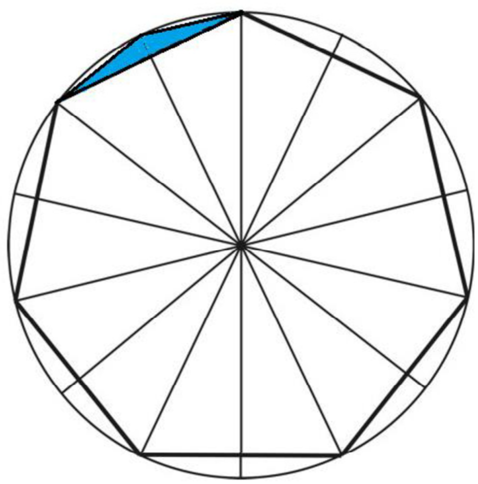
מכך שלא קיים סופרמום נסיק כי לא קיים מקסימום, ומכך שהאינפימום אינו שייך לקבוצה נסיק כי לא קיים מינימום.

4. נסמן ב A_n את השטח של מצולע משוכלל בעל 2^n צלעות החסום במעגל היחידה. תהא $A=\{A_n:2\leq n\in\mathbb{N}\}$. הראו שהקבוצה חסומה מלעיל. מהו הספרמום שלה?

פתרון:

את העובדה ש- $\left\{S_n \mid 2 \le n \in \mathbb{N}\right\}$ חסומה נקבל בחינם מההגדרה!

S_n הוא שטח המצולע המשוכלל בעל 2^n צלעות **החסום** במעגל היחידה. אז ברור ששטחו קטן משטח מעגל היחידה, כלומר $S_n < \pi \cdot 1^2 = \pi$ לכל $2 \le n \in \mathbb{N}$, ולכם π חסם מלעיל של הקבוצה. לאחר מספר שרטוטים קל לפתח אינטואיציה לגבי כך ש- S_n יתקרב לשטח המעגל ככל ש- n יגדל. בשרטוט ניתן לראות כי במעבר מ- S_n ל- S_{n+1} אנו "תופסים" חלק משמעותי (בצבע כחול) מהשטח שלא היה שייך ל- S_n, וכי החלק ש"יישאר מחוץ" ל- S_{n+1} קטן משמעותית מהחלק ש"נכנס". לכן סביר לטעון כי $\sup\left\{S_n \mid 2 \le n \in \mathbb{N}\right\} = \pi$.



5. הוכיחו את הגבולות הבאים ישירות ע"פ הגדרת הגבול:

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\cos\left(n^2\right) = 0$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4+\sqrt{n}} = 0$

פתרון:

הוכיחו על פי הגדרת הגבול:

(א) יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $N > \frac{1}{3\varepsilon}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n+(-1)^n-2n}{3n}\right| = \frac{1}{3n} < \varepsilon$.

(ב) יהא $\varepsilon > 0$. אזי קיים $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{2n}\cos(n^2) - 0\right| = \frac{1}{2n}\left|\cos(n^2)\right| \underset{\left|\cos(x)\right| \le 1 \forall x\in\mathbb{R}}{\le} \frac{1}{2n}\cdot 1 < \varepsilon.$$

(ג) יהא $\varepsilon > 0$. אזי קיים $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{3}{4+\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{3}{4+\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

6. הוכיחו ע"פ שלילת הגדרת הגבול ש:

(א) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\neq 1$

(ב) לכל $L\in\mathbb{R}$, הסדרה $(-1)^n n$ אינה מתכנסת ל-L.

<u>פתרון:</u>

הוכיחו על פי שלילת הגדרת הגבול:

(א) יהא $\varepsilon=\frac{1}{2}$. אזי לכל n אם ניקח $N=n$ נקבל:

$$\left|\frac{N+1}{2N+3}-1\right|=\left|\frac{n+1}{2n+3}-1\right|=\left|\frac{n+1-(2n+3)}{2n+3}\right|=\left|\frac{-n-2}{2n+3}\right|=\frac{n+2}{2n+3}\geq\frac{-n-2}{2n+4}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

(ב) יהא $\varepsilon=1$. לכל $n\in\mathbb{N}$ יהא $N>\max\{n,|L|+1\}$ זוגי. כעת $n>N$ ומתקיים: $N>|L|+1\geq L+1$ ולכן $N-L>1$. נקבל $\left|(-1)^N N-L\right|=|N-L|>1=\varepsilon$.