תרגיל 4 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}\right)$$

(ב) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\left(\frac{n^{2020}}{n+1}\right)+\cos^2\left(\frac{n^{2020}}{n+1}\right)}$$

(ג) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

<u>פתרון:</u> (א)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

(ב)

מכך ש- $1\le\sqrt[n]{2\sin^2\left(\frac{n^{2020}}{n+1}\right)+\cos^2\left(\frac{n^{2020}}{n+1}\right)}\le\sqrt[n]{2}$ ו- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ נקבל, לפי ממשפט "סנדוויץ'",

כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\left(\frac{n^{2020}}{n+1}\right)+\cos^2\left(\frac{n^{2020}}{n+1}\right)}=1$.

(ג)

הסדרה $x_n=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$ היא סדרת הממוצעים החשבוניים של סדרה מתכנסת $a_n=\sqrt[n]{n}$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל $m,n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

<u>פתרון:</u>

מהנתון ש- $0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל m,n טבעיים נקבל כי $a_2\le\frac{1}{2}(a_1+a_1)=a_1$. אם נניח

עכשיו כי $a_n\le a_1$, נקבל כי $a_{n+1}\le\frac{1}{2}(a_1+a_n)\le\frac{1}{2}(a_1+a_1)=a_1$. הוכחנו באינדוקציה כי $a_n\le a_1$ לכל

n טבעי ומכאן מתקיים $0\le\frac{a_n}{n}\le\frac{a_1}{n}$. ברור כי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{n}=0$ ולכן לפי ממשפט "סנדוויץ' " גם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

3. (א) תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=L>0$. האם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ בהכרח מתכנסת במובן הרחב? נמקו!

(ב) הוכיחו את "משפט הפיצה": אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת במובן הרחב לאינסוף ו־ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שעבורה קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $b_n \geq a_n$ אזי $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$.

פתרון: (א)

מהנתון $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=L>0$ עבור n מספיק גדול יתקיים $a_{n+1}-a_n>0$, כלומר הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה החל ממקום מסוים. מכאן הסדרה מתכנסת לגבול סופי או מתכנסת במובן הרחב .

נניח כי

$\lim_{n\to\infty} a_n = A<+\infty$, אזי $L=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A-A=0$ בסתירה עם הנתון. כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

(ב)

מכך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, נקבל כי לכל $A>0$ קיים $n_0\in N$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>A$. נניח כי התנאי $b_n\geq a_n$ מתקיים לכל $n>n_1$. אזי $b_n>A$ לכל $n>n^*=\max\{n_0,n_1\}$. מכאן, $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$.

4. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ונגדיר סדרה חדשה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $b_n=\max\{a_1,\dots,a_n\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

פתרון:

מהנתון $b_n=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ נקבל

$$b_1=a_1,\ b_2=\max(b_1,a_2)\geq b_1,\ b_3=\max(b_2,a_3)\geq b_2,\ \dots,b_n=\max(b_{n-1},a_n)\geq b_{n-1},\dots$$

מכאן $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה. בנוסף מכיוון ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת היא חסומה, כלומר קיים $A\in R$ כך ש- $a_n\leq A$ לכל n טבעי. לכן לכל $n\in N$ קיים $k\in N$ $(1\leq k\leq n)$ כך ש- $b_n=a_k\leq A$. כלומר $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל, לכן מתכנסת.

5. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המוגדרות באופן הבא: $a_1, b_1 > 0$ קבועים נתונים, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$ ו- $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות ולאותו הגבול.

<u>פתרון:</u>

נסמן $a^* = \min\{a_1, b_1\}$ ו-$b^* = \max\{a_1, b_1\}$ אזי $a^* \le b^*$. לפי אי-שוויון בין ממוצעים חשבוני והנדסי מתקיים $\sqrt{a_n \cdot b_n} \le \frac{a_n + b_n}{2}$, כלומר $a_{n+1} \le b_{n+1}$. מכאן נקבל $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \ge \sqrt{a_n \cdot a_n} = a_n$ לכן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה. באופן דומה מתקיים $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \le \frac{b_n + b_n}{2} = b_n$, כלומר $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת. בנוסף

$$a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \le b^*, \quad b_n \ge a_n \ge a_{n-1} \ge \ldots \ge a_2 = \sqrt{a_1 \cdot b_1} \ge a^*$$

כלומר $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע. מכאן נובע כי הסדרות מתכנסות. נסמן עכשיו $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$ ונקבל

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{A+B}{2} \quad \Rightarrow \quad 2B = A + B \quad \Rightarrow \quad B = A$$

6. נגדיר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ בעזרת נוסחת נסיגה: $a_1 = 0$ ו- $a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}$. מצאו את $\liminf_{n\to\infty} a_n$ ואת $\limsup_{n\to\infty} a_n$