

תרגיל 5 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. תהא $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרה ותהא $(b_n)_{n=1}^\infty$ סדרה שכל איבר בה הוא גבול חלקי של הסדרה $(a_n)_{n=1}^\infty$. הוכיחו כי כל גבול חלקי של $(b_n)_{n=1}^\infty$ הינו גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^\infty$.

2. עבור הסדרות הבאות, מצאו את כל הגבולות החלקיים. נמקו!

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 1 & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2 & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$a_n = 2^{\frac{(-1)^n}{n}} \quad (\text{ב})$$

$$a_1 = 0 \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \quad a_{2n} = \frac{1}{2} a_{2n-1} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = -2 + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (\text{ד})$$

(ה) $(a_n)_{n=1}^\infty$ היא סדרת כל הרציונאליים בקטע $[0, 1]$ שבה כל מספר רציונאלי מופיע בדיוק פעם אחת, למשל: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

3. השתמשו בקריטריון קושי כדי לבדוק את התכנסות הסדרות הבאות:

$$a_n = \frac{\sin(5)}{1 \cdot 2} - \frac{\sin(5^2)}{2 \cdot 3} + \dots + (-1)^n \frac{\sin(5^n)}{n \cdot (n+1)} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{1}{1^2 \cdot (3-1)} + \frac{1}{2^2 \cdot (\sqrt{3}-1)} + \frac{1}{3^2 \cdot (\sqrt[3]{3}-1)} + \dots + \frac{1}{n^2 \cdot (\sqrt[n]{3}-1)} \quad (\text{ב})$$

ש $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n > 3$ לכל $n > 1$

4. הוכיחו ישירות, תוך שימוש בהגדרה, את התכנסות הטורים הבאים וחשבו את סכומם:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n^2 + 4n} + \dots \quad (\text{א})$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \quad (\text{ב})$$

5. תהא $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרה חיובית, חסומה ומונוטונית עולה. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ מתכנס.

6. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ חיובי ומתבדר. חקרו את התכנסות הטורים:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{1 + n^2 \cdot a_n} \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{1 + a_n} \quad (\text{א})$$