# תרגיל 5 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שכל איבר בה הוא גבול חלקי של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. הוכיחו כי כל גבול חלקי של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ הינו גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

<u>פתרון:</u>

**תהי $\{b_n\}$ סדרה שכל איבר בה הוא גבול חלקי של סדרה $\{a_n\}$. הוכיחו כי כל גבול חלקי של הסדרה $\{b_n\}$ הוא גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}$**

**פתרון: יהי $L$ גבול חלקי של הסדרה $b_n$. אם $L=\infty$ הרי ש $b_n$ אינה חסומה מלעיל, אך $b_n$ הינה סדרת הגבולות החלקיים של $a_n$ ולכן לכל $M>0$ נוכל למצוא תת סדרה $a_{n_k}$ כך ש $lim_{k\to\infty}a_{n_k}=M$ ובפרט קיים $k_0$ כך ש $a_{n_{k_0}}>M-1$ כלומר, $a_n$ אינה חסומה, ולכן $limsup(a_n)=\infty$. המקרה של $L=-\infty$ דומה ולכן נטפל במקרה ש $-\infty<L\in\mathbb{R}<\infty$. נבנה באינדוקציה תת סדרה $a_{l_k}$ כך ש $lim_{k\to\infty}a_{l_k}=L$. יהי $\epsilon>0$. מכך ש $L=lim_{k\to\infty}b_{n_k}$, קיים $l\in N$ כך ש $|b_{n_l}-L|<\frac{\epsilon}{2}$. מכך ש $b_{n_l}$ גבול חלקי של $a_n$, קיים $l_1\in\mathbb{N}$ כך ש $|a_{l_1}-b_{n_l}|<\frac{\epsilon}{2}$. נשים לב שמתקיים $|a_{n_1}-L|\leq|a_{n_1}-b_{n_l}|+|b_{n_l}-L|<\epsilon$. נשים לב בחרנו את האיבר הראשון בסדרה המיוחלת. נבחר את האיבר הבא באופן הבא: נקח $l\in\mathbb{N}$ כך ש $|b_{n_l}-L|<\frac{\epsilon}{4}$, וניקח $l_2>l_1$ כך ש $|a_{l_2}-b_{n_l}|<\frac{\epsilon}{4}$ קיים כזה כיוון ש $b_{n_l}$ גבול חלקי של $a_n$. נשים לב שמתקיים: $|a_{l_2}-L|\leq|a_{l_2}-b_{n_l}|+|b_{n_l}-L|<\frac{\epsilon}{2}$. נניח כי בנינו באינדוקציה את $a_{l_1},a_{l_2},\dots a_{l_k}$, כך ש: $l_1<l_2<\cdots<l_k$ ובנוסף לכל $k\in\mathbb{N}$, $|a_{l_k}-L|<\frac{\epsilon}{2^{k-1}}$. נבחר את $a_{l_{k+1}}$ באופן הבא: נמצא $l\in\mathbb{N}$ כך ש $|b_{n_l}-L|<\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ כמקודם, קיים כזה כי $L$ הוא הגבול של $b_{nk}$, נמצא $l_{k+1}>l_k$ כך ש $|a_{l_{k+1}}-b_{n_l}|<\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$, ושוב קיים כזה כי $b_{n_l}$ הוא גבול חלקי של $a_n$. אז קיבלנו $|a_{l_{k+1}}-L|<\frac{\epsilon}{2^k}$. מכך ש $\frac{\epsilon}{2_k}\to 0$ הרי שקיבלנו כי לכל $\epsilon$ קיים $k_0$ כך שלכל $k>k_0$ מתקיים $|a_{l_k}-L|<\epsilon$ כנדרש.**

2. עבור הסדרות הבאות, מצאו את כל הגבולות החלקיים. נמקו!

(א) $$a_n=\begin{cases}0 & n\equiv 0 \pmod 3\\ 1 & n\equiv 1 \pmod 3\\ 2 & n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

(ב) $$a_n=2^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

(ג) $$a_1=0\ \ a_{2n+1}=\frac{1}{2}+a_{2n}\ \ a_{2n}=\frac{1}{2}a_{2n-1}$$

(ד) $$a_n=-2+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

(ה) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת כל הרציונאליים בקטע $[0,1]$ שבה כל מספר רציונאלי מופיע בדיוק פעם אחת, למשל: $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7}\dots$

<u>פתרון:</u> (א)

**$a_{3k-2}=1$ הסדרה הקבועה 1, ולכן $lim_{k\to\infty}a_{3k-2}=1$. באותו אופן $a_{3k-1}=2$ ולכן $lim_{k\to\infty}a_{3k-1}=2$, $a_{3k}=0$ ולכן $lim_{k\to\infty}a_{3k}=2$. מאחר ששלושת תתי סדרות אלה מכסות את כל האינדקסים, הרי שאלו כל הגבולות החלקיים של הסדרה.**

(ב)

$\sqrt[2k]{2} = 2^{\frac{1}{2k}} = a_{2k}$ ולכן $lim_{k\to\infty}a_{2k} = 1$. $\sqrt[2k-1]{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{2k-1}} = a_{2k-1}$ ולכן $lim_{k\to\infty}a_{2k-1} =$

**1. אז מצאנו שכל גבול חלקי של הסדרה $a_n$ הוא 1 ולכן הסדרה $a_n$ עצמה מתכנסת ומתקיים $lim_{n\to\infty}a_n = 1$**

(ג)

**$a_{2n+1} = 0.5 + a_{2n} = 0.5 + 0.5a_{2n-1}$. $a_{2n+2} = 0.5a_{2n+1} = 0.25 + 0.5a_{2n}$ נראה באינדוקציה כי $a_{2n+1}$ מונוטונית עולה: $a_3 = 0.5 > a_1 = 0$ נניח כי $a_{2k+1} > a_{2k-1}$ אזי $a_{2k+3} = 0.5 + 0.5a_{2k+1} > 0.5 + 0.5a_{2k-1} = a_{2k+1}$. כנדרש, כאשר המעבר האחרון נובע מהנחת האינדוקציה. באותו אופן ניתן לראות באינדוקציה כי סדרת האינדקסים הזוגיים מונוטונית עולה. נראה כי שתיהן חסומות מלעיל ומכך ינבע שהן מתכנסות.**

$$a_{2n+1} > a_{2n-1} \to a_{2n+1}-a_{2n-1} > 0 \to 0.5+0.5a_{2n-1}-a_{2n-1} > 0 \to 0.5 > 0.5a_{2n-1} \to a_{2n-1} < 1$$

**באותו אופן ניתן לראות כי סדרת האינדקסים הזוגיים חסומה על ידי $0.5$ כעת, כפי שראינו בתרגול, כיוון שהסדרות מתכנסות ניתן לחשב את הגבול על ידי הצבה בנוסחת הנסיגה של כל אחת מתתי הסדרות. אז נקבל:**

$$L_1 = 0.5 + 0.5L_1 \to L_1 = 1$$

$$L_2 = 0.25 + 0.5L_2 \to L_2 = 0.5$$

(ד)

**זו סדרה מתכנסת ולכן יש לה גבול יחיד. נראה זאת:**

$$0 \le |(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})sin(\tfrac{\pi n}{2})| \le |(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})||sin(\tfrac{\pi n}{2})| \le \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \to 0$$

**ולכן מכלל הסנדוויץ': $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \to 0$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות:**

$$lim_{n\to\infty}x_n = -2 + 0 = -2$$

3. השתמשו בקריטריון קושי כדי לבדוק את התכנסות הסדרות הבאות:

(א) $$a_n = \frac{\sin(5)}{1\cdot 2} - \frac{\sin(5^2)}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^n\frac{\sin(5^n)}{n\cdot(n+1)}$$

(ב) $a_n = \frac{1}{1^2\cdot(3-1)} + \frac{1}{2^2\cdot(\sqrt{3}-1)} + \frac{1}{3^2\cdot(\sqrt[3]{3}-1)} + \ldots + \frac{1}{n^2\cdot(\sqrt[n]{3}-1)}$. (רמז: הראו תחילה ש $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n > 3$ לכל $n > 1$)

<u>פתרון:</u> (א)

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|(-1)^{n+2}\frac{\sin\left(5^{n+1}\right)}{(n+1)\cdot(n+2)}+(-1)^{n+3}\frac{\sin\left(5^{n+2}\right)}{(n+2)\cdot(n+3)}+\ldots+(-1)^{n+p+1}\frac{\sin\left(5^{n+p}\right)}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\sin\left(5^{n+1}\right)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right|+\left|\frac{\sin\left(5^{n+2}\right)}{(n+2)\cdot(n+3)}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin\left(5^{n+p}\right)}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)}=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}$$

ועכשיו, לכל $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ נבחר $n_0$ כך ש- $\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$ , למשל $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ . אזי לכל $n>n_0$ ולכל $p$ טבעי מתקיים

$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ , כלומר הסדרה מתכנסת לפי קריטריון קושי.

(ב)

לפי אי-שוויון ברנולי

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n>3,\forall n>1\quad\Rightarrow\frac{2}{n}>\sqrt[n]{3}-1\quad\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[n]{3}-1}>\frac{n}{2}\quad\Rightarrow\frac{1}{n^2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)}>\frac{1}{2n},\forall n>1$$

נבחר עכשיו $p=2n$ ו- $\varepsilon=\frac{1}{4}$ . נתבונן בהפרש

$$\left|a_{2n}-a_n\right|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2\left(\sqrt[k]{3}-1\right)}>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k}\ge n\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}=\varepsilon$$

לפי קריטריון קושי, הסדרה מתבדרת.

4. הוכיחו ישירות, תוך שימוש בהגדרה, את התכנסות הטורים הבאים וחשבו את סכומם:

(א) $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\ldots+\frac{1}{n^2+4n}+\ldots$

(ב) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

פתרון: (א)

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{n^2+4n}=$$
$$=\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{2\cdot6}+\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{4\cdot8}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+4)}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{48}<\infty$. מכאן הטור מתכנס וסכומו $S=\frac{25}{48}$.

(ב)
נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

השתמשנו בנוסחה לסכום של $n$ האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. מכך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$,

נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<\infty$. מכאן הטור מתכנס וסכומו $S=\frac{3}{2}$.

5. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, חסומה ומונוטונית עולה. הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ מתכנס.

<u>פתרון:</u>

מכך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, חסומה ומונוטונית עולה, היא מתכנסת. לכן קיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > a_1 > 0$. כמו כן

$$1-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ :

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_1+b_2+\ldots+b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_2-a_1+a_3-a_2+\ldots+a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=L-a_1<\infty$$

מכאן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ מתכנס ולכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ מתכנס לפי מבחן השוואה.

6. נתון כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ חיובי ומתבדר. חקרו את התכנסות הטורים:

(א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ (ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2\cdot a_n}$

<u>פתרון:</u> (א)

אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל, נגיד ע"י $M>0$, אזי מתקיים $\frac{a_n}{1+a_n}\ge\frac{a_n}{1+M}$

ולכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר לפי מבחן השוואה. מצד שני, אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה מלעיל, אזי קיימת

תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\infty$ ולכן $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{a_{n_k}+1}=1$. כלומר התנאי ההכרחי להתכנסות הטור אינו

מתקיים.

(ב) התכנסות הטור נובעת מאי-השוויון $\frac{a_n}{1+n^2\cdot a_n}\le\frac{a_n}{n^2\cdot a_n}=\frac{1}{n^2}$