

תרגיל 8 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. יהא $a > 0$ ותהא $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a) = f(0)$. הוכיחו שקיים $x_0 \in [0, \frac{a}{2}]$ כך ש $f(x_0) = f(x_0 + \frac{a}{2})$.
2. האו כי אם $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה והגבולות $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ קיימים וסופיים אזי f חסומה ב- \mathbb{R} .
3. הוכיחו/הפריכו: תהא f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a, b) כך ש $f(x) \in \mathbb{Q}$ לכל $x \in (a, b)$. אזי f פונקציה קבועה בקטע.
4. תהיינה f, g שתי פונקציות רציפות בקטע $[0, 1]$ המקיימות $g([0, 1]) = [0, 1]$ ו- $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. הוכיחו שקיימת $x_0 \in [0, 1]$ כך ש $f(x_0) = g(x_0)$.
5. נניח שהטמפרטורה על כדור הארץ תלויה באופן רציף במיקום. הוכיחו כי:
 - (א) בכל רגע נתון יש על קו המשווה נקודה שבה הטמפרטורה היא הכי גבוהה מבין כל הנקודות על קו המשווה.
 - (ב) בכל רגע נתון יש שתי נקודות נגדיות על קו המשווה בהן יש את אותה הטמפרטורה בדיוק.
6. הוכיחו כי אם $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה אזי הגבולות $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ קיימים וסופיים.
7. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \ln x$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0, 1)$.