פתרון של תרגיל 8

שאלה 1 נגדיר פונקציה עזר

$$g(x) = f(x) - f\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

לכל $x\in[0,\frac{a}{2}]$. $g(x)$ רציפה כי $f(x)$ רציפה

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) - f(a)$$

על פי $f(0)=f(a)$, $g\left(\frac{a}{2}\right) = -g(0)$

לכן לפי משפט ערך הביניים של קושי קיימת

$x_0\in[0,\frac{a}{2}]$ כך ש $g(x_0)=0$, כלומר $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$

שאלה 2 נסמן $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M$

לפי הגדרה של גבולות

$$\exists x_1>0 \quad \forall x>x_1 \quad |f(x)-L|<1 \Rightarrow |f(x)|<|L|+1$$

$$\exists x_2<0 \quad \forall x<x_2 \quad |f(x)-M|<1 \Rightarrow |f(x)|<|M|+1$$

פונקציה $f(x)$ רציפה לכן על פי Weierstrass Cola

יש $C = \max\limits_{x\in[x_2,x_1]} |f(x)|$

אם נסמן $\tilde{C} = \max\{C, |L|+1, |M|+1\}$ אז

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad |f(x)| \le \tilde{C}$$

זה אז $f(x)$ פונקציה חסומה ב $\mathbb{R}$

שאלה 3 נניח כי $f(x)$ באמת פונקציה קבועה.
נניח בשלילה ש $f(x) \neq const$ לכן יש שתי נקודות
$a_1 < b_1$ בקטע (a,b) כך ש $f(a_1) \neq f(b_1)$
ביין כל שני מספרים ממיים יש מספר רציונלי,
נקבע מספר אי-רציונלי C ביין $f(a_1)$! $f(b_1)$.
על פי משפט ערך הבינים יש $c \in (a_1, b_1)$ כך ש
$f(c) = C$
זו סתירה עם הנחה ש $f(x) \in \mathbb{Q}$ לכל x.
לכן $f(x)$ כן קבועה

שאלה 4 נתון כי $g([0,1]) = [0,1]$.
לכן יש $x_1, x_2 \in [0,1]$ כך ש
$g(x_1) = 0$; $g(x_2) = 1$
נגדיר פונקציה עזר $\varphi(x) = f(x) - g(x)$
בקטע $[x_1, x_2]$ (או $[x_2, x_1]$ במקרה ש $x_2 < x_1$).
$\varphi(x)$ פונקציה רציפה כי f, g רציפה.
$\varphi(x_1) \geq 0$, $\varphi(x_2) \leq 0$, לכן יש נקודה x_0
בקטע $[x_1, x_2]$ כך ש $\varphi(x_0) = 0$
זייא $f(x_0) = g(x_0)$. (כמו בהוכחה של משפט
על קיום נקודת השבת).

שאלה 5 פונקציה הטמפרטורה על קו המשווה
אפשר לתאר כפונקציה $f(x)$ על הקטע $[0, 2\pi]$
כאשר $f(0) = f(2\pi)$ (x פה זו זווית פולרית)
(א) $f(x)$ רציפה, לכן יש $\max f(x)$ (ו-ם $\min f(x)$)
על פי משפט ווי רשאר.
(ב) שתמש בתוצאה של שאלה (1). $a = 2\pi$
$f(0) = f(2\pi)$. לכן יש x_0 כך ש $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$
זווית x_0 וזווית $x_0 + \pi$ נתנות שתי נקודות נגדיות
על קו המשווה.