



בוחרן חדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, תאריך 20.01.2023
מספר הקורס: 201.1.2361, התוכנית האקדמית לקורס הטיס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות.
- חומר עזר: אין. מחשבון: אין.
- יש לענות על כל 3 שאלות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "לא יודע" ולקבל חמישית מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

שאלה 1 (30 נקודות)

(א) (5 נקודות) הגדירו את המושגים: $\sup X, \inf X$.

(ב) (25 נקודות) תהי מוגדרת קבוצה של שברים $X = \left\{ \frac{2mn}{m^2 + n^2} : m, n \in N \right\}$, כאשר $N = \{1, 2, \dots\}$

זו קבוצה של כל הטבעים. האם קיימים $\max X, \min X$? אם לא אז האם יש $\sup X, \inf X$?

שאלה 2 (35 נקודות)

נניח כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את התכונות: $a_n \geq 0$ לכל n וקיים גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 2023$.

הוכיחו או הפריחו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

שאלה 3 (35 נקודות)

(א) (5 נקודות) מהו הניסוח של קריטריון קושי?

(ב) (30 נקודות) נניח כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את התכונה הבאה: $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2 + n}$ לכל n .

הוכיחו שסדרה מתכנסת לגבול סופי.

בהצלחה!

20.01.2023 / אורח בל / יו"ר

יש ג' 3 נ. $\frac{2mn}{m^2+n^2} = 1$ רק $m=n$ רק 1 בדק

$\frac{2mn}{m^2+n^2} \leq 1 \iff (m-n)^2 \geq 0$ ' m, n בד' $\frac{2mn}{m^2+n^2} \leq 1$
 ' \forall ρ \forall κ בד' $\min X$. $\max X = 1$ ρ בד'

$x_n = \frac{2n}{n^2+1}$ ' $n \geq 0$ \rightarrow $n=1$ \rightarrow $x_1 = 1$ \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ רק
 $0 \notin X$ \rightarrow $0 = \inf X$ \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ רק
 ' ρ \forall κ בד' $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ רק

2 בדק \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ רק

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad 2022 < (a_n)^n < 2024$

$\forall n > n_0 \quad \sqrt[n]{2022} < a_n < \sqrt[n]{2024}$ ρ בד'

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ' \forall ρ \forall κ בד' \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ρ בד'

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2022} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024} = 1$ ρ בד'

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

ρ "ג' \forall κ בד' \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

3 בדק \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ρ בד'

(*) $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m > n_0 \quad |a_n - a_m| < \epsilon$

$m > n$ \rightarrow $a_m - a_n$

$a_m - a_n = a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \dots + a_{n+1} - a_n$
 \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ρ בד'

$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq$

$\leq \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2+m-1} =$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ρ בד' \rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ρ בד'