אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' נבחן: 39259

תאריך הבחינה: 27/06/04

שם המורה: ד"ר מ. לוין, ד"ר ד. וולק

מבחן ב: חדו"א 2ג

מס' הקורס: 201-1-9151

מיועד לתלמידי: כימיה והנדסה כימית

שנה: תשס"ד סמ': ב מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד (דו-צדדי)
מחשבון

בחר 4 שאלות מתוך 5

כל שאלה שווה 25 נק'

1) א) מצא את המרחק בין הנקודה $(5,4,3)$ והמישור שעובר דרך הנקודות $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$.

ב) יהיו $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ שמקיימים $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$. מצא את השטח של המקבילית הנוצרת ע"י $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$.

2) תהי $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+15$

א) מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של $f(x,y)$

ב) מצא את המינימום והמקסימום של $f(x,y)$ בריבוע $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$.

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 27/06/04

שם המורה: ד"ר ח.לוין, ד"ר ז.וולוק

מבחן ב: חדו"א 2ג

מסי הקורס: 201-1-9151

מיועד לתלמידי:

שנה: תשס"ד סמ׳: ב מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד (ע׳ 333-13) מחשבון

מסי נבחן: 39259

(3) העקומה מוגדרת ע"י הפונקציה הוקטורית

$$\vec{r}(t) = (\sin t)\vec{i} + (\sqrt{2}\cos t)\vec{j} + (\sin t)\vec{k}$$

א) מצא את אורך העקומה עבור $\pi \le t \le 2\pi$.

ב) מצא את עקמומיות העקומה ב- $t = \frac{\pi}{2}$.

(4) א) מצא את נפח הגוף החסום ע"י החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ והספרה $x^2+y^2+z^2=1$

ב) מצא את שטח הפנים של הגוף המוגדר בסעיף (א).

(5) העקמה הסגורה C והכיוון שלה נתונים ע"י המשוואות $x=\cos t$, $y=\sin t+2$, $0 \le t \le 2\pi$.

חשב את האינטגרלים הקוויים:

א) $$\oint_C x^{99}y^{100}\,dx + x^{100}y^{99}\,dy$$

ב) $$\oint_C \frac{2-y}{x^2+(y-2)^2}\,dx + \frac{x}{x^2+(y-2)^2}\,dy$$

בהצלחה!

ג (1

$P=(5,4,3)$

$A=(1,1,0)$
$B=(1,0,1)$
$C=(0,1,1)$

$$\bar n = \bar{AB}\times\bar{AC} = (0,-1,1)\times(-1,0,1) = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar i(-1-0) - \bar j(0+1) + \bar k(0-1) =$$

$$= (-1,-1,-1) \Rightarrow \underline{(1,1,1)}$$

משוואת המישור: $1(x-1)+1(y-1)+1(z-0)=0$

$$\underline{x+y+z-2=0}$$

V

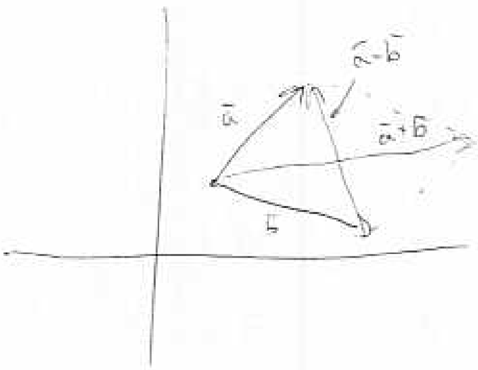
נשתמש בנוסחה למציאת מרחק:

$$d = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{|1\cdot 5 + 1\cdot 4 + 1\cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt3}} \sim 5.77$$

V

ב



$\frac{25}{25}$

בגלל שקיים התנאי: $|\bar a - \bar b| = |\bar a + \bar b|$ הווקטורים אמורים ליצור מלבן (האלכסונים במלבן שווים זה לזה!). ולכן השטח של המלבן שנוצר הוא:

$$S = |\bar a|\cdot|\bar b| = 2\cdot 3 = \boxed{6}$$

(הוכחה נוספת לכך שזה מלבן: אחרי שאלה 2 (בסוף המחברת))

2-

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+15$$

ה) מציאת נק' קיצון

$$f'_x=3x^2-3y=0 \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$$
$$f'_y=3y^2-3x=0$$

$$x=x^4$$
$$x^4-x=0$$
$$x(x^3-1)=0$$

$$x_1=0 \quad ; \quad x_2=1$$
$$y_1=0 \quad \quad y_2=1$$

מצאנו 2 נק' (אין נק' שבהן הפונ' או הנגזרת לא מוגדרות)

כעת נבדוק לפי הנוסחה:

$$f''_{xx}=6x \Rightarrow f''_{xx}(0,0)=0 \qquad f''_{xy}=-3$$
$$\Rightarrow f''_{xx}(1,1)=6$$

$$f''_{yy}=6y \Rightarrow f''_{yy}(0,0)=0$$
$$\Rightarrow f''_{yy}(1,1)=6$$

$$\Delta=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2 \Rightarrow \Delta(0,0)=-9 \Longrightarrow$$ לכן (0,0) היא נק' אוכף

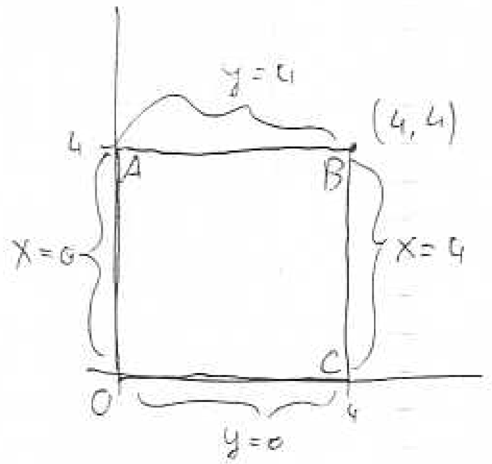
$$\Delta(1,1)=6^2-(-3)^2=27>0 \Rightarrow$$ יש מינ'/מקס' מקומי

$$\cancel{f''_{xx}>0}\ f''_{xx}(1,1)>0 \Rightarrow$$ בנק' (1,1) יש מינימום מקומי.

$$f(1,1)=14$$

13

ג



בסעיף ב' מצאנו נק' מינימום אחת - (1,1).

$f(1,1) = 14_{min}$

נבדוק את קודקודי התחום:

$f(0,0) = 15$

$f(0,4) = 79$

$f(4,4) = 95 \; max$

$f(4,0) = 79$

נבדוק לאורך השפה ע"י הצבה:

$\underline{OA}$: $\cancel{}$ $f = y^3 + 15$

$(x=0)$

$f' = 3y^2 = 0$

$y = 0 \Rightarrow$ את הנק' הזו כבר מצאנו!!

$\underline{AB}$: $f = x^3 + 4^3 - 3 \cdot x \cdot 4 + 15 = x^3 - 12x + 79$

$(y=4)$

$f' = 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2 \Rightarrow f(2,4) = 63$

(x=-2 לא בתחום!)

$\underline{BC}$: $f = 4^3 + y^3 - 12y + 15 = y^3 - 12y + 79$

$(x=4)$

$f' = 3y^2 - 12 = 0$

(y=-2 לא בתחום!) $y = 2 \Rightarrow f(4,2) = 63$

$\underline{CO}$: $f = x^3+15$

$(y=0)$ $f' = 3x^2 = 0$

כבר בדקנו את הנק׳ הזו!! $\Leftarrow$ $\underline{x=0}$

<u>המינימום של הפונק׳</u>: $\underline{\underline{14}}$ בנק׳ $(1,1)$

(מוחלט)

<u>המקסימום של הפונק׳</u>: $\underline{\underline{95}}$ בנק׳ $(4,4)$

(מוחלט)

12

3.

$\bar{r}(t) = (\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sin t)$

$\pi \le t \le 2\pi$ א.

$\bar{r}'(t) = (\cos t, -\sqrt{2}\sin t, \cos t)$

$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + 2\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t} = \underline{\sqrt{2}}$

$$S = \int_{\pi}^{2\pi} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\cdot t\Big|_{\pi}^{2\pi} = \sqrt{2}(2\pi - \pi) = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$

$$\bar{T}(t) = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, -\sqrt{2}\sin t, \cos t) =$$ ב.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$$

$$\bar{T}'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, -\cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$$

$$|\bar{T}'(t)| = \sqrt{\frac{1}{2}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

$$K = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right| = \frac{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sim 0.71$$

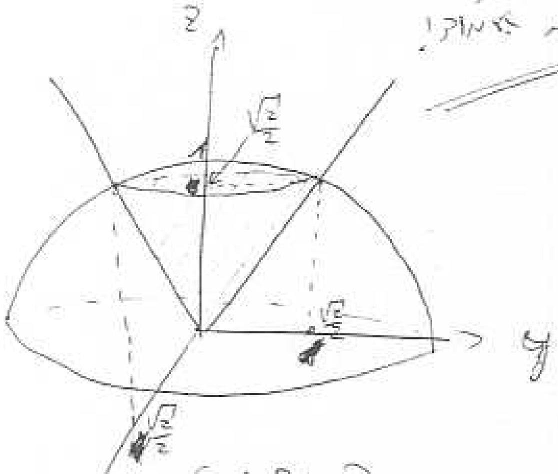
75/75

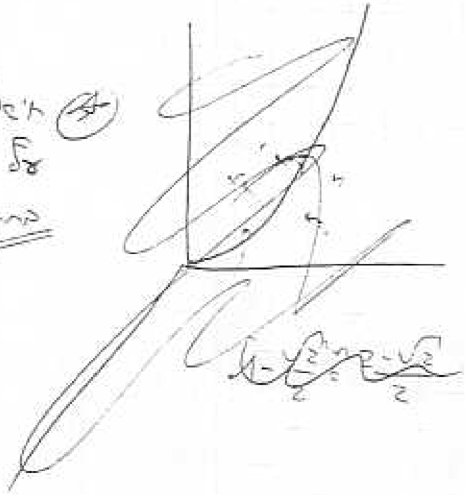
4\. (ג)

$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2+z^2=1$

איך מציאת התחום של גבולות ונקודות במערכת צירים!





$$V_{\rho\theta\varphi}\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le \pi/4\end{cases}$$

נעבור לקואורדינטות ספריות:

$x=\rho\cos\theta\sin\varphi$

$y=\rho\sin\theta\sin\varphi$

$z=\rho\cos\varphi$

$J=\rho^2\sin\varphi$

$$V=\iiint_{V_{x,y,z}} dx\,dy\,dz=\iiint_{V_{\rho,\theta,\varphi}}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^{1}\rho^2\, d\rho=2\pi\cdot\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4}\right)\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\right)=$$

$$=2\pi\left[-\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right]\cdot\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\boxed{\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)}\sim 0.61$$

איך מוצאים את הגבולות התחום:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z^2=x^2+y^2\end{cases}$$

$2z^2=1$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=0:\ y^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$

$y=\pm\sqrt{\frac{2}{2}}$

$y=0:\ x^2+\frac{1}{2}=1$

$x=\pm\sqrt{\frac{2}{2}}$

② מצא את שטח ה-S: שטח חרוט שבתוך הספירה (כדור):

שטח חרוט: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$S=\iint_D\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}\,dx\,dy=\iint_D\sqrt{\frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D\sqrt{\frac{2\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\iint_D dx\,dy=\sqrt{2}\left(\begin{array}{c}\text{שטח עיגול}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{רדיוס}\end{array}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

שטח ספירה: $x^2+y^2+z^2=1$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$S=\iint_D\sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+1}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D\sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\left\{\begin{array}{ll}\text{קואורדינטות קוטביות} & x=r\cos\theta\\ & y=r\sin\theta\\ & 0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2}\\ & 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right\}=$$

$$=\iint_{D_{r,\theta}}\sqrt{\frac{1}{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dr^2}{\sqrt{1-r^2}}=$$

25/28

$$=-\frac{1}{2}2\pi\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-r^2)^{-1/2}d(1-r^2)=-\pi\frac{(1-r^2)^{1/2}}{1/2}=$$

$$=+\pi\left[\frac{\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{1/2}}{1/2}-\frac{1}{1/2}\right]=+\pi\left[\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{1/2}-\frac{2}{1}\right]=+2\pi\left(\frac{(1/2)^{1/2}}{1}-1\right)=$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$$

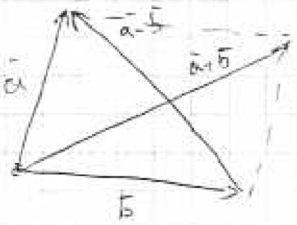
$$= -2\pi\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/2} - (1-0)^{1/2}\right] = -2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right] = 2\pi\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

סה"כ הנפח של הגוף הוא:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + \pi\left(2-\sqrt{2}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2-\sqrt{2}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\pi\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \sim$$

~ 4.06

$|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}+\vec{b}|$



$\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})} = |\vec{a}-\vec{b}| =$

$= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{13-2\vec{a}\vec{b}}$

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(a+b)(a+b)} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{13+2\vec{a}\vec{b}}$

עפ״י הגדרת מאונך;

$\sqrt{13-2\vec{a}\vec{b}} = \sqrt{13+2\vec{a}\vec{b}}$

$\cancel{13}-\cancel{2}\vec{a}\vec{b} = \cancel{13}+\cancel{2}\vec{a}\vec{b}$

$0 = 2\vec{a}\vec{b}$

$\vec{a}\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \quad \underline{\vec{a}\perp\vec{b}}$ מש״ל