BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV

בן- גוריון אוניברסיטה בנגב

מדור בחינות

מסי נבחן : ______________

תאריך הבחינה: **02.07.06**

שם המרצה: **דר' . זלצמן, דר' ליפאנסקי , דר' שטראוס**

מס' הקורס:

מבחן ב: **חדו"א ג 2**

שנה: **א'** סמ': **ב'** מועד: **א'**

משך הבחינה: **3 שעות**

חומר עזר: **2 דפי נוסחאות (4 עמודים) , מחשב כיס עם צג קטן**

ל' גז חסין

יש לענות רק על 5 שאלות מתוך 6.

כל שאלה שווה 20 נקודות.

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

השאלות:

1 . א) (10 נק') מצא מרחק בין שני ישרים מקבילים l_1 ו- l_2 :

$$l_1:\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad l_2: \frac{1-x}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$$

ב) (10 נק') הוכח כי הווקטורים $\vec{a}(1,1,m), \vec{b}(1,1,m+1), \vec{c}(1,-1,m)$ לא קופלנרים עבור כל ערך של פרמטר m

2. א) (10 נק'.) החלף סדר אינטגרציה באינטגרל כפול

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

ב) (10 נק) מצא את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $z=\sqrt{x^2+y^2}$ בנקודה $M(3,4)$

1) בכיוון חוצה זווית של רבעי ראשון (בכיוון חיובי של ציר ה- x)

2) בכיוון מראשית הצירים לנקודה M

3 א) (8 נק') מצא את המשוואת מישור משיק ו ישר נורמל למשטח $\tan(\frac{x}{y})+z^2=\ln(\frac{4\sqrt{2}}{\pi}xz)+1.5$

ב) (12 נק') מצא את השטף של שדה ווקטורי

$$\bar{F}=(x^3-2y^2)\hat{i}+(e^{2z}+y^3)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$$

דרך המשטח $S=\{z=-x^2-y^2, z\ge -4\}$ ~~בעל נורמל חיובי~~

4 א) (10 נק') מצא שטח פנים של חלק הספרה $x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge\sqrt{3}$

ב) (10 נק') חשב $\int_L (e^x\sin y-y+1)dx+(e^x\cos y-1)dy$ כאשר מסילה L היא חצי מעגל $x^2+y^2=2x, y\ge 0$ מהנקודה (2,0) עד לנקודה (0,0) .

5א) (10 נק') על פני אליפסואיד $x^2+y^2+z^2=2x+4$ מצא נקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים .

ב) (10 נק') מצא את הערך הגדול ביותר וקטן ביותר של הפונקציה $z=x+y$ בתחום D כאשר $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0. 4y\le 3x, x^2+y^2\le 25\}$

6. א) פתח את הפונקציה לטור חזקות של x $f(x)=x^2\cos(2x)+\sin^2(x)$ (12 נקודות)

ב) מצא את תחום ההתכנסות של הטור הנ"ל (8 נקודות)

בהצלחה !!!

בעיה 10

מצא מרחק בין שני ישרים

$$l_1: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases} \qquad l_2: \frac{1-x}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$$

פתרון צורה קנונית של משוואת הישר l_2 היא.

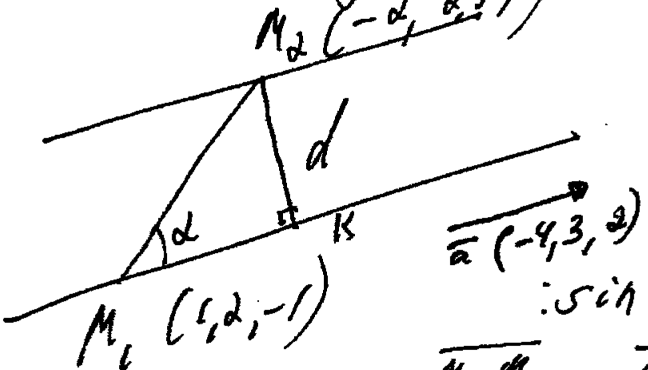
$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$$

אזי נקודה $M_1(1,2,-1)\in l_2$ ווקטור $\overline{a}(-4,3,2) \parallel l_2$

נמצא בישר l_1. אם $z=0$ אז נקבל

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow x=-2,\ y=2.5$$

אז $M_2(-2,2.5,0)\in l_1$



נמצא וקטור $\overline{M_1M_2}(-3,\tfrac{1}{2},1)$ אזי $|\overline{M_1M_2}|=\frac{\sqrt{41}}{2}$

מהמשולש ΔM_1M_2K נמצא $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{a}}{|\overline{M_1M_2}|\,|\overline{a}|}=\frac{31}{\sqrt{41\cdot 29}}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{228}{41\cdot 29}}$$

אזי

$$d=|M_2K|=|M_1M_2|\sin\alpha=\sqrt{\frac{57}{29}}$$

הערה ניתן לפתור בעיה הזו בעזרת המכפלה הווקטורית

$$d=\frac{|\overline{M_1M_2}\times\overline{a}|}{|\overline{a}|}=\frac{|(-3,\tfrac{1}{2},1)\times(-4,3,2)|}{\sqrt{4^2+3^2+2^2}}=\sqrt{\frac{57}{29}}$$

e הוכח כי הווקטורים

$\bar{a}(1,1,m)$, $\bar{b}(1,1,m+1)$, $c(1,-1,m)$

לא קופלנרים עבור כל ערך של פרמטר m

פתרון

אם״ם

הווקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$ ו-c לא קופלנריים

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\neq 0$$

כלומר

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} \neq 0$$ לכל m

אבל

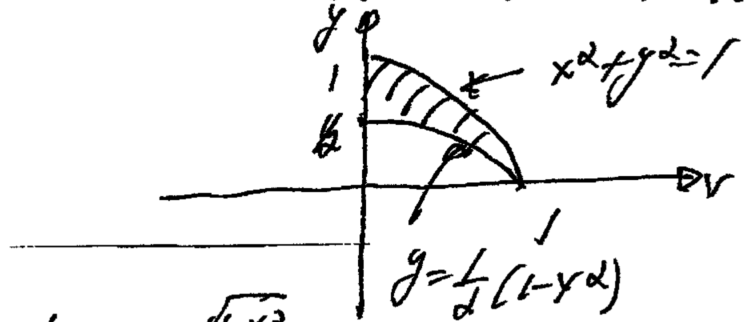
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

לכן $\bar{a}$, b ו-c אינם קופלנריים.

שאלה 2 (10) החלף סדר אינטגרציה באינטגרל כפול

$$I=\int_0^{1/2}dy\int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_{1/2}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$$

פתרון: לפי הגבולות תחום של אינטגרציה הוא



מכאן נקבל:

$$I=\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$$

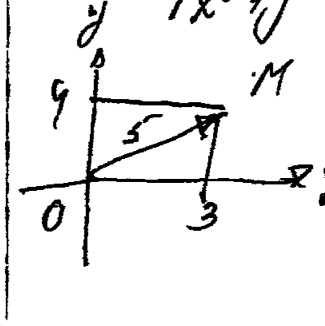
(2) מצא את הנגזרת של הפונקציה $z=\sqrt{x^2+y^2}$ בנקודה $M(3,4)$

1. בכיוון חוצה זווית רביע ראשון (בכיוון חיובי של ציר ה-x)

2. בכיוון מראשית הצירים לנקודה M

פתרון: 1. נחשב נגזרת כיוונית של $z=\sqrt{x^2+y^2}$ בכיוון $\bar{e}=\bar{i}+\bar{j}$

$$\frac{\partial z}{\partial e}\Big|_M=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\cos\beta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_M\cos\frac{\pi}{4}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_M\cos\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$



2. אז הכיוון הוא $\bar{l}_1=\frac{3}{5}\bar{i}+\frac{4}{5}\bar{j}$

אזי

$$\frac{\partial z}{\partial l_1}\Big|_M=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$

סעיף 3 א מצא משוואת מישור משיק וישר נורמל למשטח

$$(*) \quad \tan\left(\frac{x}{y}\right) + z^2 = \ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} xz\right) + \frac{3}{2}$$

בנקודה $A\left(\underset{x_0}{\pi/4},\ \underset{y_0}{1},\ \underset{z_0}{1/\sqrt{2}}\right)$

פתרון: משוואת מישור משיק בנקודה A היא כדלקמן

$$F'_x\Big|_A (x-x_0) + F'_y\Big|_A (y-y_0) + F'_z\Big|_A (z-z_0) = 0$$

נחשב הנגזרות F'_x, F'_y, F'_z

$$F'_x = \frac{1}{y\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} - \frac{1}{x} \Rightarrow F'_x\Big|_A = 2 - 4/\pi$$

$$F'_y = -\frac{x}{y^2\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \Rightarrow F'_y\Big|_A = -\pi/2$$

$$F'_z = 2z - 1/z \Rightarrow F'_z\Big|_A = 0$$

משוואת המישור משיק למשטח (*) בנקודה A היא

$$\left(2 - \frac{4}{\pi}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \pi/2\,(y-1) = 0$$

משוואת הנורמל

$$\frac{x-x_0}{F'_x|_A} = \frac{y-y_0}{F'_y|_A} = \frac{z-z_0}{F'_z|_A}$$

לכן

$$\frac{x-\pi/4}{2-4/\pi} = \frac{y-1}{-\pi/2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ב) מצא את השטף של השדה הוקטורי

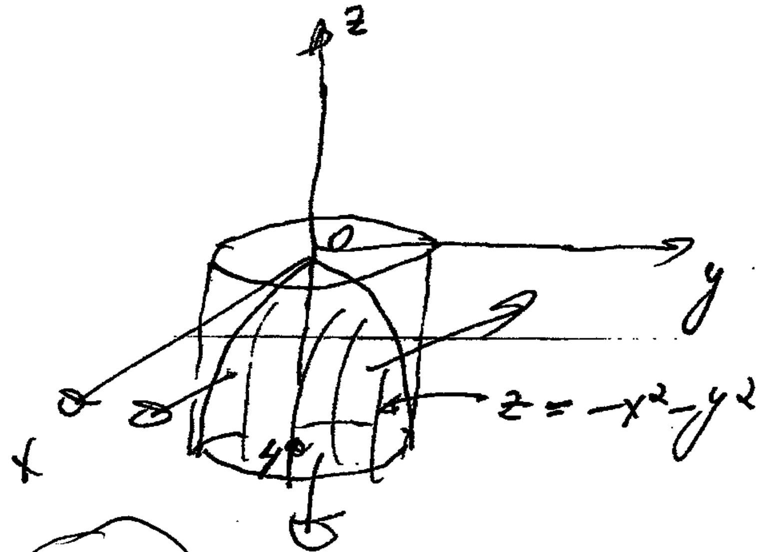
$$\bar{F} = (x^3 - 2yz)\,\bar{i} + (e^{2z} + y^3)\,\bar{j} + (z^2 - xy)\,\bar{k}$$

דרך המשטח

$$S = \{ z = -x^2 - y^2 ,\ z \geq -4 \}$$

כלפי מעלה וחוץ

פתרון



נוסיף את המישור $z=-4$ ונשתמש בנוסחת גאוס

ואז השטף של $\bar{F}$ דרך $S' = S \cup S_1$

כאשר $S_1 = \{ z = -4 ,\ x^2 + y^2 \leq 4 \}$

אז

$$\iint\limits_{S' = S \cup S_1} \bar{F}\bar{n}\, dS = \iint\limits_{S} + \iint\limits_{S_1}$$

(כיוון של הנורמל כלפי חוץ)

ולפי גאוס

$$I = \iint\limits_{S'} \bar{F}\bar{n}\, dS = \iiint \operatorname{div} \bar{F}\, dv$$

ר.ג

$$I = \iint\limits_{S'} \bar{F}\bar{n}\, dS' = \iint \qquad =$$

$$= \iint\limits_{D} dx\, dy \int_{-4}^{-x^2-y^2} \left(3(x^2+y^2) + 2z\right) dz$$

$$I = \iint_D \left(3(x^2+y^2) z \Big|_{-4}^{-x^2-y^2} + z^2 \Big|_{-4}^{-x^2-y^2} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(-2(x^2+y^2)^2 + 12(x^2+y^2) - 16 \right) \cancel{dx\,dy}$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות

$$I = \iint_{D^*} \left(-2r^4 + 12r^2 - 16 \right) r\,dr\,d\varphi$$

כאשר

$$D^* = \{ (r,\varphi) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(-2r^4 + 12r^2 - 16 \right) r\,dr = [t = r^2]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \left(-2t^2 + 12t - 16 \right) dt = -16/3 \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= -32\pi/3$$

מכסה [illegible]

$$\iint_{S_1} \bar{F}\,\bar{n}\,dS = \iint_{S_1} (z^2 - xy)(-1)\,dS =$$

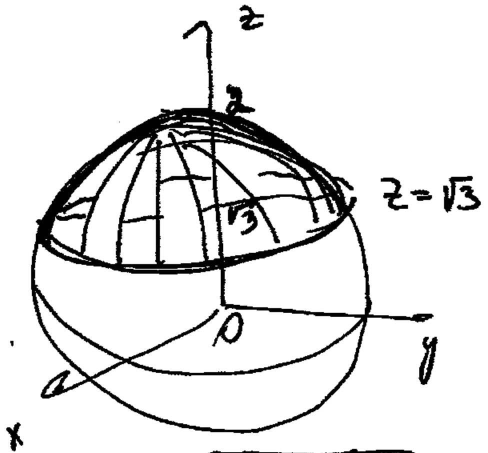
$$= \iint_D (-16 + xy)\,dx\,dy = \iint_{D^*} \left(\frac{r^2 \sin 2\theta}{2} - 16 \right) r\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(\frac{r^3 \sin 2\theta}{2} - 16r \right) dr =$$

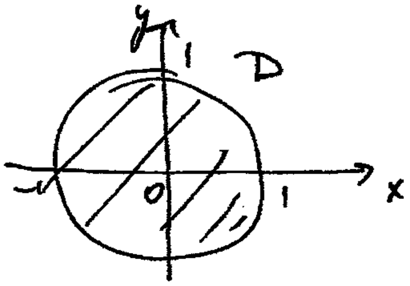
$$= \int_0^{2\pi} (2 \sin 2\theta - 32)\,d\theta = -32 \cdot 2\pi = -64\pi$$

$$\iint_S \bar{F}\,\bar{n}\,dS = \iint_{S \cup S_1} - \iint_{S_1} = -32\pi/3 + 64\pi = \overset{\text{סוף}}{160\pi/3}.$$

$x + y + z = 4,\ z \geq$ (k



$$x^2+y^2+3=4$$
$$x^2+y^2=1$$



$$ds = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

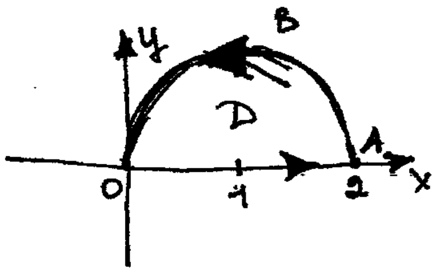
$$S = \iint\limits_D \frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{-2r\,dr}{\sqrt{4-r^2}} = -2\pi\cdot\int_4^3 t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$4-r^2=t$$
$$-2r\,dr=dt$$

$$= -2\pi\cdot 2\sqrt{t}\,\Big|_4^3 = -2\pi\,(2\sqrt{3}-4) = 2\pi\,(4-2\sqrt{3}) = 4\pi\,(2-\sqrt{3}).$$

$$\int\limits_L (e^x\sin y - y + 1)\,dx + (e^x\cos y - 1)\,dy$$

$$(x-1)^2+y^2=1$$



~~:מסלול לא סגור~~

OA: $y=0,\ dy=0$

$$\int\limits_L + \int\limits_{OA} = \oint = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \iint\limits_D dx\,dy = S_D = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$Q'_x = e^x\cos y,\quad P'_y = e^x\cos y - 1$$
$$Q'_x - P'_y = 1$$

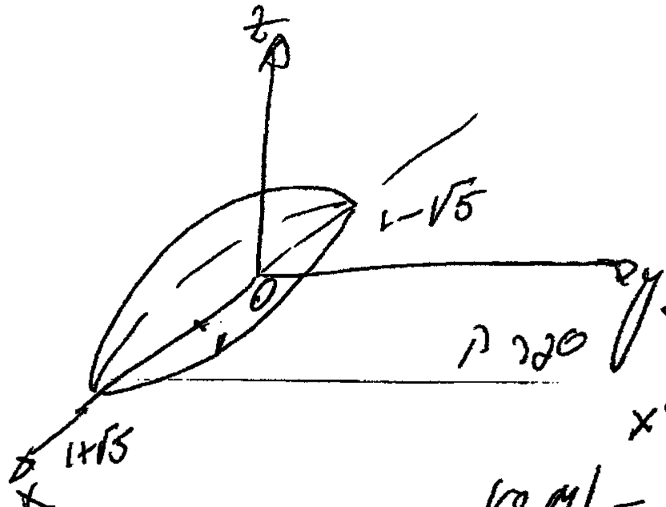
$$\int\limits_{OA} P\,dx = \int_0^2 dx = 2$$

$$\int\limits_L = \boxed{\frac{\pi}{2} - 2}$$

שאלה 5 א על פני אליפסואיד $x^2+y^2+z^2=2x+4$

מצא נקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים

פתרון



תהי $M(x,y,z)$ נקודה על ספרה

$$x^2+y^2+z^2-2x-4=0$$

אז $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

נתבונן בפונקציה

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

(ברור כי $|OM|^2=f(x,y,z)$) צריך לחקור את הפונקציה $x^2+y^2+z^2=f(x,y,z)$ אשר $x^2+y^2+z^2-2x-4=0$ (אילוץ)

נרכיב את הפונקציה של לגרנז' למציאת מינימום ומקסימום עבור $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ עם אילוץ הנ"ל

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-2x-4)$$

$$\begin{cases} F'_x=0 \\ F'_y=0 \\ F'_z=0 \\ F'_\lambda=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ x(1+\lambda)-\lambda=0 \\ (2)\ y(1+\lambda)=0 \\ (3)\ z(1+\lambda)=0 \\ (4)\ x^2+y^2+z^2-2x-4=0 \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y=0$ או $\lambda=$

אבל אם $\lambda=-1$ אז נגיע לסתירה עם המשוואה (1)

לכן $y=0$ וגם $z=0$ ו- $x=1\pm\sqrt{5}$

אם $x=1+\sqrt{5}, y=0, z=0$ אזי

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=(1+\sqrt{5})^2$$

אם $x=1-\sqrt{5}$, $y=0$ $z=0$ אזי

$$f(x,y,z)=(1-\sqrt{5})^2$$

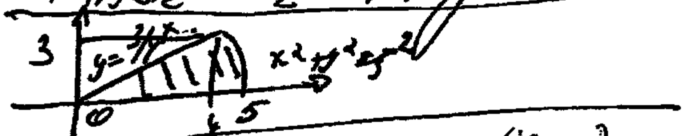
מהמשמעות הגיאומטרית נקבל שנקודה

$A(1-\sqrt{5},0,0)$

היא קרובה לראשית הצירים.

(3) מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z=x+y$ בתחום

$D=\{(x,y) \mid x\ge 0, y\ge 0, y\le \frac{3x}{4}, x^2+y^2\le 25\}$



פתרון מכיוון ש- $z'_x=1\ne 0$ $z'_y=1\ne 0$ אין נקודות חשודות

עבור $z=x+y$ בפנים התחום D

על השפה $y=0$ נקבל $z=x+y=x \Rightarrow z'_x=1\ne 0$ ולכן

אין נקודות חשודות על השפה $y=0$

על השפה $y=3x/4$ נקבל $z=x+\frac{3x}{4}=\frac{7x}{4} \Rightarrow z'_x=7/4\ne 0$

ולכן אין גם נקודות החשודות על השפה הזו

נבדוק בחלק של שפה D: $x^2+y^2=25$ אזי

$\cancel{z=x+y=x+\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow z'_x=1-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}=0$

$\Rightarrow x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}.$

נקודות $\left(\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\notin D$ ומספיק למצוא ערכים של $z=x+y$

בנקודות פינתיות של הגבולות

$z(0,0)=0.\quad z(4,3)=7.\quad z(5,0)=5$

① א ⑫ פתחו את הפונקציה

$$f(x) = x^2 \cos 2x + \sin^2 x$$

לטור חזקות של x

ב ⑧ מצא את תחום ההתכנסות של הטור הנ"ל

פתרון: נשתמש בזהויות טריגונומטריות נקבל

$$f(x) = x^2 \cos 2x + \sin^2 x = x^2 \cos 2x + \frac{1-\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x^2 \cos 2x - \cos 2x + 1\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-2} x^{2n-2}}{(2(n-1))!} + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$2x^2 \cos 2x = 2x^2 - \frac{2^3 x^2}{2!} + \frac{2^5 x^6}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2(n-1))!} +$$

$$1 + 2x^2 \cos 2x - \cos 2x = \left(2 - \frac{2^2}{2!}\right) x^2 - \left(\frac{2^3}{2!} - \frac{2^4}{4!}\right) x^4 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} x^{2n} \left(\frac{2^{2n-1}}{(2(n-1))!} - \frac{2^{2n}}{(2n)!}\right) + \dots$$

(ב) רדיוס ההתכנסות עבור הטור האחרון בעל אותו
ערך כטור חזקות עבור $y=\cos x$ ז.א.
או ~~הגדל~~ מתכנס בכל נקודה על $\mathbb{R}$.