תאריך הבחינה : 17. 08. 2008
שמות המורים: פרופי מ. בראברמן
ד"ר ר. ליפיאנסקי
מבחן א: חדו"א ג2
מס' הקורס: 201-1-9151
שנה: תשס"ו סמ': ב מועד: א
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (4 עמ')
מחשב כיס עם צג קטן

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

מס' נבחן : 079626

(1) ענה על 5 מ-6 השאלות הבאות, נא לא לענות על יותר מ-5 שאלות,
(2) משקל כל שאלה 20 נקודות ,
(3) כל תשובה צריכה להיות מנומקת ,
(4) עמוד הראשון של מחברת הבחינה ציינו על איזה שאלות אתם עונים.

שאלה 1. ✓ ✓

א) שנה את סדר האינטגרציה $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$.

ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$.

שאלה 2. ✓ ✓

מצא תחומי ההתכנסות של טורי חזקות הבאים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ ב) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$

שאלה 3. ✓ ✓

א) נתון שדה וקטורי $\vec{F} = \frac{-y^2}{x^3}\vec{i} + \left(\frac{y}{x^2} + 2x\right)\vec{j}$. מצא $I = \int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ כאשר γ - מעגל $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3/2$ בכיוון נגד סיבוב השעון.

ב) מצא משוואות מישורי המשיק לגרף של הפונקציה $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ בנקודות $A(0,-1,1)$ ו- $B(-1,0,1)$. מצא את המשוואה הקנונית של ישר החיתוך בין שני המישורים שמצאת.

שאלה 4. ✓ ✓

מצא את הנפח של הגוף המוגבל על ידי הספרה $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ והגליל $x^2 + y^2 = 1$.

שאלה 5. מסק

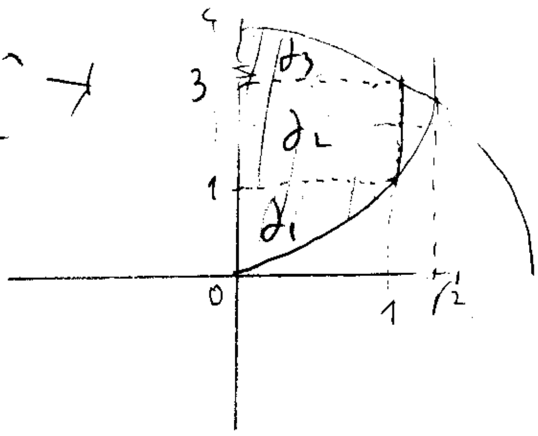
מצה את מרכז הכובד של המשולש עם הקודקודים $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ כאשר צפיפות מסה היא $\rho(x,y)=x^2+y^2$.

שאלה 6.

מצא את הערך הגדול ביותר (ואת הערך הקטן ביותר) של הפונקציה $z=x^2-xy+y^2$ בתחום סגור $D=\{(x,y):\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$

בהצלחה !!

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$$



$y = x^2$

$y = 4 - x^2$

$x^2 = 4 - x^2$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$y = 4-(1)^2$

$y = 3$

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$+\sqrt{y}$

$y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y$

$x = \sqrt{4-y}$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{4-y}$

D

$$I_{D_1} = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$$

$$I_{D_2} = \int_1^3 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

$$I_{D_3} = \int_3^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx$$

$$I_D = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^3 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx + \int_3^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx$$

10

$f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$ (2)

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_{(x)} = y + 2 - \frac{2xy}{x^2 y} = y + 2 - \frac{2}{x}$ $\quad f'_x = 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_{(y)} = x - \frac{x^2}{x^2 y} = x - \frac{1}{y}$ $\quad f'_y = 0$

(1) $y + 2 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y + 2 - \frac{2}{\frac{1}{y}} = 0 \Rightarrow y + 2 - 2y = 0$

$-y + 2 = 0$

(2) $x - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$\boxed{y = 2}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$m = (\frac{1}{2}, 2)$ זו נקודה סטציונרית (נק')

$\frac{\partial f'}{\partial^2 x} = f''_{(xx)} = \frac{2}{x^2}$

$\Delta = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$

$\frac{\partial f'}{\partial^2 y} = f''_{yy} = \frac{1}{y^2}$

$\Delta = \frac{2}{x^2 \cdot y^2} - 1$

10

$\Delta_m = \frac{2}{2^2 (\frac{1}{2})^2} - 1 = 2 - 1 = 1$

$\frac{\partial f'}{\partial x \partial y} = 1 \cdot z''_{xy}$

לכן $\Delta > 0$ זו נק' max

נבדוק עבור m את $f''_{(xx)}(m) = \frac{1}{2^2}$ חיובי לכן זו נק' מינ'

$m(\frac{1}{2}, 2)$ זו נק' מינימום

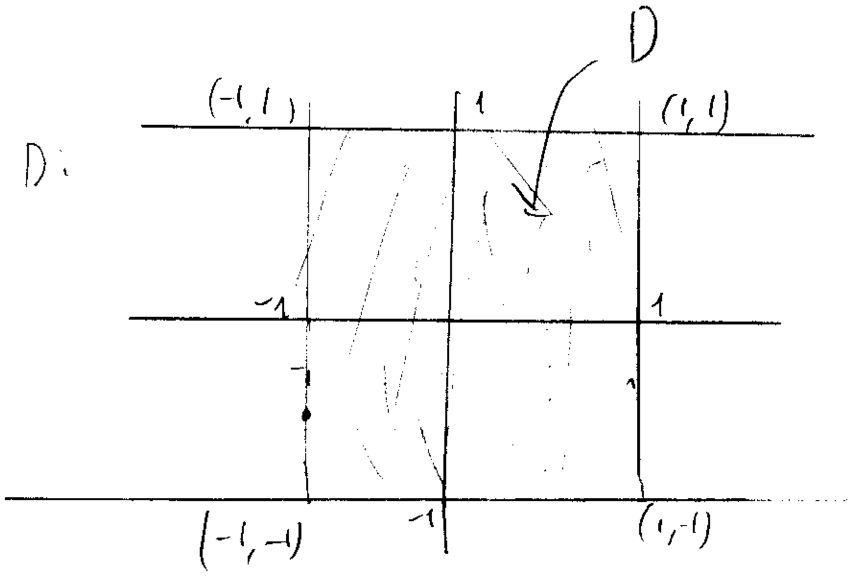
$f(x,y)$

$10 + 10 = 20$

[illegible]

$f(x,y) = z = x^2 - xy + y^2$

D:



$z'_{(x)} = 2x - y = 0 \qquad 4y - y = 0 \qquad 3y = 0$ [illegible]

$z'_{(y)} = 2y - x = 0 \qquad y = 0,\ x = 0 \qquad \boxed{(0,0)}$ [illegible]

[illegible]

$\underline{x=1} \qquad z = y^2 - y + 1$

$z'_{(y)} = 2y - 1 = 0 \qquad y = \frac{1}{2} \qquad \boxed{(1, \frac{1}{2})}$ [illegible]

$x=-1 \qquad z = y^2 + y + 1$

$z'_y = 2y + 1 = 0 \qquad y = -\frac{1}{2} \qquad \boxed{(-1, -\frac{1}{2})}$ [illegible]

$y=1 \qquad z = x^2 - x + 1$

$z'_{(x)} = 2x - 1 \qquad x = \frac{1}{2} \qquad \boxed{(+\frac{1}{2}, 1)}$ [illegible]

$y=-1 \qquad z = x^2 + x + 1$

$z' = 2x + 1 \qquad x = -\frac{1}{2} \qquad \boxed{(-\frac{1}{2}, -1)}$ [illegible]

[illegible]

$f(0,0) = 0$

$f(1, \frac{1}{2}) = 0.75$

$f(-1, -\frac{1}{2}) = 0.75$

$f(\frac{1}{2}, 1) = 0.75$

$f(-\frac{1}{2}, -1) = 0.75$

$f(1,1) = 1$

$f(-1,-1) = 1$

$f(1,-1) = 3$

$f(-1,1) = 3$

$\boxed{\begin{array}{l} \min\ (0,0) \\ \max\ (1,-1)\ \text{וגם}\ (-1,1) \end{array}}$

2 שאלה

(1.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

$a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

$\frac{1}{R} = D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \cdot 1$

[illegible] $\frac{n+1}{n+2}$ [illegible] 1 [illegible] ∞ [illegible]

$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$

$R = \frac{1}{D} = \frac{1}{1} = 1$

$\cancel{|x|<1}$ $|x| < R$

$-1 < \cancel{x} < 1$ [illegible]

[illegible]

$x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$f(x) = a_n = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$

$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int \frac{1}{z}dz = \ln(\ln(x+1))\Big|_1^{\infty} =$

$z = \ln(x+1)$

$dz = \frac{dx}{(x+1)}$

[illegible]

$= \infty$ [illegible]

[illegible] $x=1$

$x=-1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

טור מתחלף

נבדוק את תנאי לייבניץ

$$|a_n|=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$ – מונוטונית יורדת

מתכנס לפי לייבניץ

אם מתקיים לייבניץ, a_n מונוטונית יורדת ל-0

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}=0$$ שואף לאפס

∞ שואף ל

$a_n=\frac{1}{n\ln n}$ מונוטונית יורדת

לפי לייבניץ הטור מתכנס בתנאי $x=-1$

לכן תחום ההתכנסות:

$-1\le x<1$ (כולל $x=-1$)

ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad a_n=\tan\frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1}=\tan\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{R}=D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{(n+1)^2}}{\tan\frac{1}{n^2}}=$$

כאשר $n\to\infty$ $\frac{1}{(n+1)^2}\to 0$ וגם $\frac{1}{n^2}\to 0$

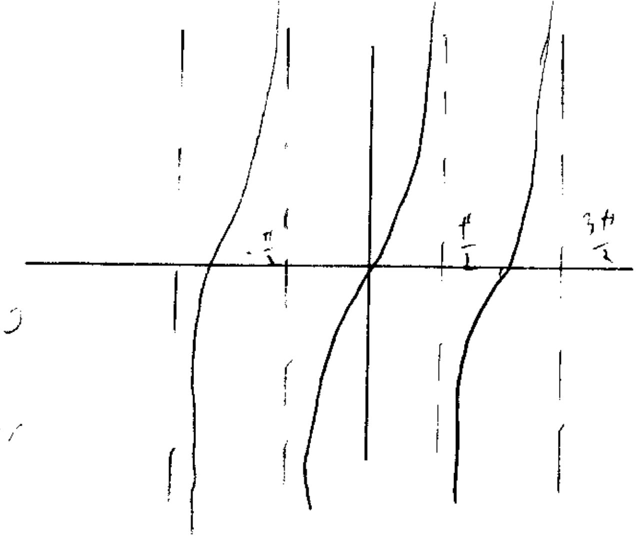
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{(n+1)^2}\cdot n^2\cdot(n+1)^2}{\tan\frac{1}{n^2}\cdot(n+1)^2\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$$

$$D=1\Rightarrow\frac{1}{R}=D\Rightarrow R=1$$

$|x|<R$

$-1<x<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$



[illegible] tan

[illegible]

[illegible] $\alpha \cong \tan\alpha$ [illegible]

$b_n = \frac{1}{n^2}$

[illegible]

$$c_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{z\to 0} \frac{\tan z}{z} = 1$$

[illegible] $\frac{1}{n^2} = z$ [illegible]

$n\to\infty$, $z\to 0$.

[illegible] x [illegible]

[illegible] x [illegible]

$f(x) = \tan\frac{1}{n^2}$

[illegible]

$\frac{1}{n^2}$ [illegible]

$0 < c_1 < \infty$ [illegible]

[illegible]

$\tan\frac{1}{n^2}$ [illegible]

[illegible] $x=1$ [illegible]

[illegible] $x=-1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad |a_n| = \tan\frac{1}{n^2}$$

[illegible]

$|a_n|$ [illegible]

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \tan\frac{1}{n^2} = 0$$

[illegible]

$-1 \le x \le 1$

10

19

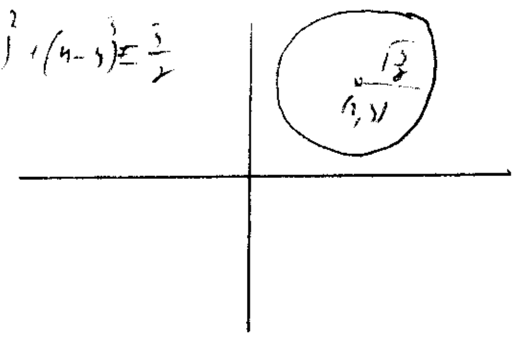
(1)

D 3 נק'

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2y}{x^3} + 2$$

$\gamma = D = (x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{3}{2}$



משפט גרין

X≠0 הפונקציה רציפה וגזירה ולכן ניתן להשתמש במשפט גרין

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial y}{x^3} + 2 + \frac{\partial y}{x^3} \right) = \iint_D 2\,dx\,dy$$

מעבר לפולריות

$$\begin{cases} x-2 = R\cos\theta & \Rightarrow \quad x = r\cos\theta + 2 \\ y-3 = R\sin\theta & \quad\quad\; y = r\sin\theta + 3 \end{cases}$$

$0 < \theta < 2\pi$

$0 < r < \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3/2}} 2r\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \left(r^2 \Big|_0^{\sqrt{3/2}} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 2\pi}{2} = 3\pi$$

(+)

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ זה חרוט

(2)

$$z'_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z'_{(A)} = \frac{0}{\sqrt{(-1)^2}} = 0 \qquad z'_{(B)} = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2}} = -1$$

$$z'_{(y)} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z'_{(A)} = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2}} = -1 \qquad z'_{(B)} = \frac{0}{\sqrt{(-1)^2}} = 0$$

(A) $z - z_0 = z'_{(x)}(x - x_0) + z'_{(y)}(y - y_0)$

$z - 1 = 0(x-0) + (-1)(y+1) \Rightarrow z = -y \Rightarrow z + y = 0$

V

B) $z - 1 = -1(x+1) + 0(y-0) \Rightarrow z = -x \qquad x + z = 0$

$$\bar{N}_A = (0,1,1)$$
$$\bar{N}_B = (1,0,1)$$

[illegible]

$$\bar{P} = \bar{N}_A \times \bar{N}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

[illegible]

$$z + y = 0$$
$$z + x = 0$$
$$y = -x$$

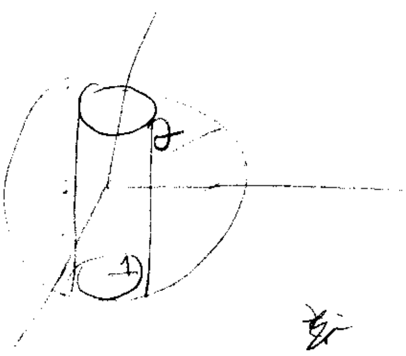
$z = 0$

$(1, -1, 0)$

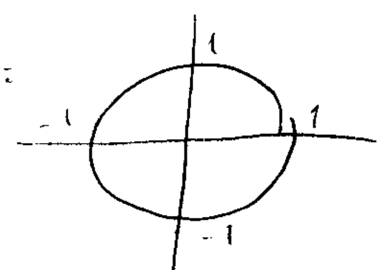
[illegible]

$$l = \boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}}$$

4 [illegible]



D:



$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$z = \sqrt{3}$

$x^2 + y^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 1}$

[illegible]

$$V = \iint_D f_{(x,y)} - \iint_D g_{(x,y)}$$

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$V = 2\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{4 - r^2}\, r\, dr =$$

$0 < \theta < 2\pi \quad x = r\cos\theta$

$0 < r < 1 \quad y = r\sin\theta$

[illegible]

$= 2\cdot\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \sqrt{4-r^2}\, r\,dr = -\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_4^3 \sqrt{z}\, dz}_{} = \ ?$

$z = 4-r^2$

$dz = -2r\,dr$

$\frac{dz}{-2} = r\,dr$

$r=0 \Rightarrow z=4$

$r=1 \quad z=3$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\Big|_4^3\right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{2}{3}\sqrt{(4-r^2)^3}\Big|_0^1\right) = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{3}\cdot d\theta = \boxed{4\pi\sqrt{3}}$

$V_{\text{גליל}} = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right) =$

(יעקוביאן)

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,d\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$V_{\text{גוף}} = V_{\text{כדור}} - V_{\text{גליל}} = \boxed{4\pi\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}$

-5

$V_{\text{גליל}} =$ שטח בסיס × גובה $= \pi r^2 \cdot h$

$r=1$

$h = \Delta z = (\sqrt{3} - (-\sqrt{3})) = 2\sqrt{3}$

עם הסבר... [illegible]

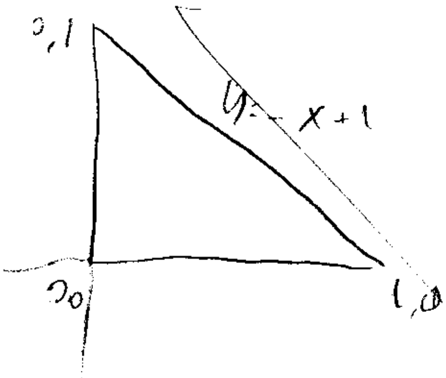
[illegible]

$V_{\text{גליל}} = \pi \cdot (1)^2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,\pi$

$V_{\text{גוף}} = V_{\text{כדור}} - V_{\text{גליל}} = 4\pi\sqrt{3} - 2\pi\sqrt{3} = \underline{2\pi\sqrt{3}}$

5 [illegible]

1)



$$M = \iint_D \rho \, dx\, dy = \iint x^2 + y^2 \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} x^2 + y^2 \, dy = \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{-x+1} \right) =$$

$$= \int_0^1 (-x+1)^3 + \frac{(-x+1)^3}{3}$$