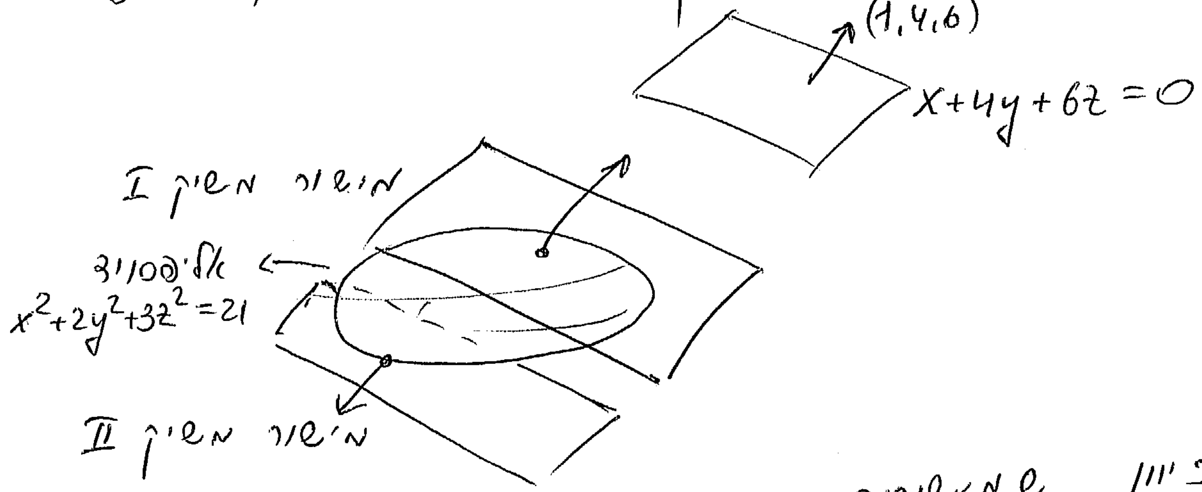
1

1) א. יש למצוא את כל המישורים למשטח $x^2+2y^2+3z^2=21$ שמקבילים למישור $x+4y+6z=0$

ב. יש למצוא מרחק בין מישורים משיקים הנ"ל?



כיוון שמישורים משיקים מקבילים ל $x+4y+6z=0$, נבקש נורמל למישור משיקים מקביל ל $(1,4,6)$:

$$g(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2=21$$

$$\nabla g = (2x, 4y, 6z) = t\cdot(1,4,6)$$

$$\left\{ x = \frac{t}{2} \ ; \ y = t \ ; \ z = t \right\}$$

יש למצוא לאיזה t הנקודה (x,y,z) נמצאת על האליפסויד:

$$\underbrace{\left(\frac{t}{2}\right)^2}_{x} + 2\underbrace{t^2}_{y} + 3\underbrace{t^2}_{z} = 21 \ ; \quad 5.25t^2=21$$

$$t^2=4$$

$$\underline{t=\pm 2}$$

קיימת שתי נקודת השקה:

I. $t=2$; $(1,2,2)$

משוואת מישור משיק על סמך נקודה ונורמל $(1,4,6)$:

$$1(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$$

$$\boxed{x+4y+6z-21=0}$$

II. $t=-2$; $(-1,-2,-2)$

$$1(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0$$

$$\boxed{x+4y+6z+21=0}$$

ב.

מרחק בין שני מישורים מקבילים $= \dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|21-(-21)|}{\sqrt{1^2+4^2+6^2}} = \dfrac{42}{\sqrt{53}}$

2) א. יש לפתח לטור חזקות בסביבה של $x=0$ את
$$f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
וקבעו תחום התכנסות.

ב. יש לחשב ערך מקסימלי ומינימלי של פונקציה
$$z(x,y)=x-2y^2$$
בתחום
$$\begin{cases} 0\leq x\leq y \\ |y|\leq x^2 \end{cases}$$
.

א. נשתמש בטורי מקלורן הבאים:
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}x^n$$
$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=\ln\left(\frac{\cancel{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)}\right)=$$
$$=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=$$

עד כאן מגיעה בניקוד מלא.

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n\cdot n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n$$

4

תחום התכנסות: נמצא רדיוס לביטוי $\frac{x}{2}$

$$R \underset{\text{קושי}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

קיימת התכנסות בהחלט עבור

$$-1<\frac{x}{2}<1$$

בדיקת קצוות (נבצע בדיקה עבור החלק של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$\frac{x}{2}=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ טור הרמוני מתבדר.

$$\frac{x}{2}=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$ טור הרמוני מחליף סימן מתכנס בתנאי

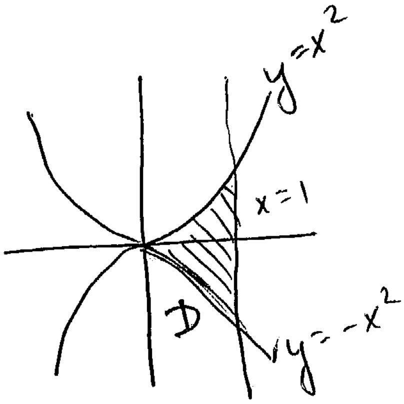
לחלק זה של הטור ישנה התכנסות בתנאי רק עבור $\frac{x}{2}=-1$.
אם נבדוק את החלק השני, נגלה שהמצב הפוך, כלומר יש התכנסות בתנאי אך ורק עבור $\frac{x}{2}=1$
סה"כ, ע"י חיתוך של שני התחומים נגלה שיש התכנסות אך ורק בתוך הקטע (ללא הקצוות)

תחום התכנסות: $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ או $\boxed{|x|<2}$

ב

ב. $z(x,y) = x - 2y^2 \qquad D = \begin{cases} x \in [0,1] \\ |y| \leq x^2 \end{cases}$

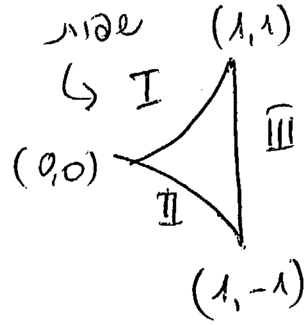
$$|y| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$$



(i) בדיקת נקודות חשודות בפנים.

$z_x = 1 \neq 0$ אין נקודות קריטיות בפנים

$z_y = -4y$ (מוגדר בכל D)



(ii) <u>שפות:</u>

I. $y = x^2, \quad x \in (0,1)$

$z(x, y=x^2) = x - 2x^4$

$z' = 1 - 8x^3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ הנקודה בתוך התחום, נוסיף לטבלה.

II. $y = -x^2, \quad x \in (0,1)$

$z(x, y=-x^2) = x - 2x^4 \xrightarrow[\text{אותו הדבר}]{} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ גם בתוך התחום

III. $x = 1, \quad y \in (-1,1)$

$z(x=1, y) = 1 - 2y^2, \quad z' = -4y = 0, \quad y = 0$

$(1,0)$ נקודה בתחום

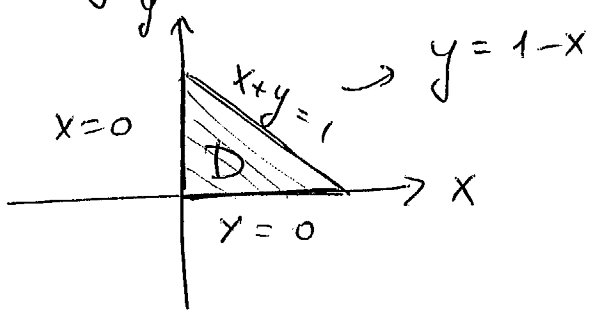
x	y	z	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$3/8$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$3/8$	
1	0	1	$\rightarrow$ max מוחלט
0	0	0	קודקודים
1	1	-1	קודקודים $\gg$ min מוחלט
1	-1	-1	קודקודים

6

3) א. מצאו נפח המוגבל ע"י

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ x+y=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

D_{xy} $(z=0)$

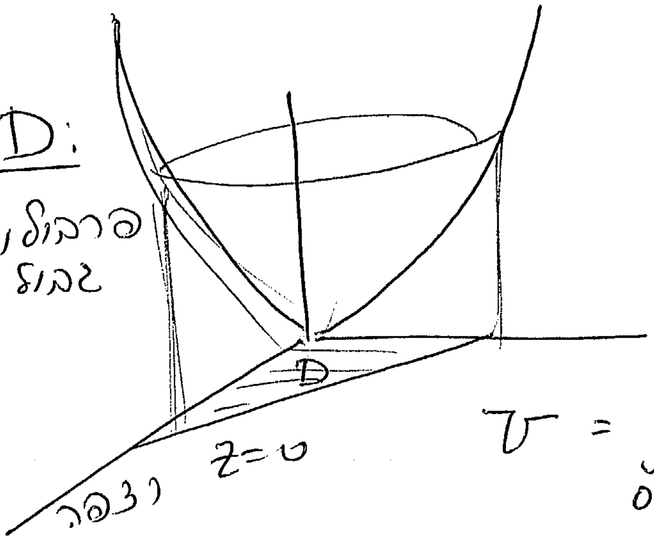


$x: 0 \to 1$

$y: 0 \to 1-x$

3D:

פרבולויד כמו עציץ



$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \cdot (x^2+y^2) =$$

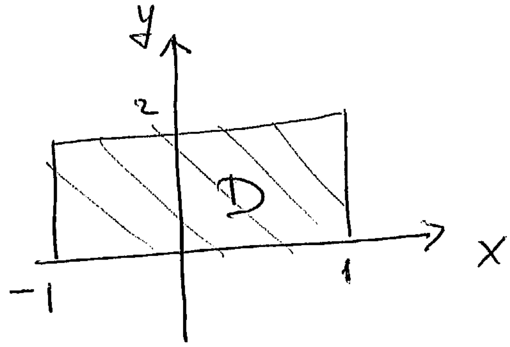
$$= \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} = \int_0^1 dx \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ב. מצאו מסת גוף מישורי

$-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$

כאשר הצפיפות $\rho(x,y)=|x|+|y|$



$$M=\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2 dy\,(|x|+|y|)=$$

כיוון שהביטוי מכיל ערך מוחלט יש לפצל את האינטגרל.

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_0^2 dy\,(-x+y)+$$

כיוון ש y נע בתחום חיובי בלבד, הערך המוחלט עליו זניח

$$+\int_0^1 dx\int_0^2 dy\,(x+y)=$$

התחום של x סימטרי לכן ניתן לחשב מסה של חצי תחום ולהכפיל ב2.

$$=2\int_0^1 dx\int_0^2 dy\,(x+y)=2\int_0^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=2\int_0^1 dx\,(2x+2)=4\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=6$$

4) א. נתון:

$$u(x,y) = (x+y)^3 - 4x^2 - 48y$$

יש למצוא נקודות min/max מקומי.

ב. יש לקבוע תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot \ln(n+1)}$$

א.

$$\begin{cases} u_x = 3(x+y)^2 - 8x = 0 & (i) \\ u_y = 3(x+y)^2 - 48 = 0 & (ii) \end{cases}$$

$$-8x + 48 = 0 \rightarrow x = 6$$

נציב בתוך (ii):

$$\cancel{3}(6+y)^2 = \cancel{48} \rightarrow (6+y)^2 = 16 \rightarrow$$

$$6+y = \pm 4 \longrightarrow y_1 = -2$$

$$y_2 = -10$$

יש שתי נקודות חשודות: $(6,-2)$, $(6,-10)$

סיווג:

$$u_{xx} = 6(x+y) - 8$$

$$u_{xy} = 6(x+y) \qquad D = u_{xx} \cdot u_{yy} - u_{xy}^2$$

$$u_{yy} = 6(x+y)$$

$$D(6,-2) = \underbrace{(6 \cdot 4 - 8)}_{u_{xx}} \cdot \underbrace{(6 \cdot 4)}_{u_{yy}} - \underbrace{(6 \cdot 4)}_{u_{xy}}^2 = -192 < 0$$

$\boxed{(6,-2) \text{ נקודת אוכף}}$

$$D(6,-10) = (6(-4)-8) \cdot (6 \cdot (-4)) - (6(-4))^2 = 192 > 0 \Rightarrow \boxed{(6,-10) \ \max}$$

$$u_{xx}(6,-2) = -32 < 0$$

ב. תחום התכנסות:

$$R \underset{\text{לא מבר}}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}\cdot(n+1)\ln(n+2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \underset{\downarrow}{=} 1.$$

(עבור לפונקציה של משתנה רציף x

$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$

וע"י לופיטל נוכל להראות שהגבול הנו 1.

ק"מ התכנסות בהחלט עבור
$-1 < x < 1$

בדיקת קצוות:

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln(n+1)}$$

נבדוק טור ערכים מוחלטים

$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n\ln(n+1)}}_{a_n}$ על סמך מבחן ~~אינטגרלי~~ השוואה

~~$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\ln(x+1)\cdot x} = \int \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}}dx = t \quad = dt$~~

למדנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n\ln(n)}}_{b_n}$ מתבדר.

נשווה עם טור זה

10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cancel{n}\ln(n+1)}\cdot\cancel{n}\cdot\ln n \underset{\downarrow}{=} 1.$$

ע"י מעבר
למשתנה רציף + לופיטל

מסקנה: הטורים מתנהגים בצורה זהה,
כלומר גם טור ערכים מוחלטים
מתבדר.

נבדוק טור מקורי ע"י לייבניץ:

א. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ב. האיבר הכללי $\frac{1}{n\ln(n+1)}$ הולך ל 0
בצורה מונוטונית (ניתן להראות
זאת ע"י גזירה ובדיקת סימן
של נגזרת).

<u>הטור מתכנס בתנאי עבור $X=+1$</u>.

$$X=(-1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n\ln(1+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$$

כבר ראינו שטור זה מתבדר.

<u>סופי:</u> תחום התכנסות

$$-1<X\le 1$$

בתנאי.

5) א. נתון:

$$z(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

יש למצוא כל הנקודות שבהן

$$\text{grad}\, z = +i - j$$

ב. יש להחליף סדר אינטגרציה

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{4\ln(x+1)} f(x,y)\, dy$$

א)

$$\text{grad}(z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right) = (1,-1)$$

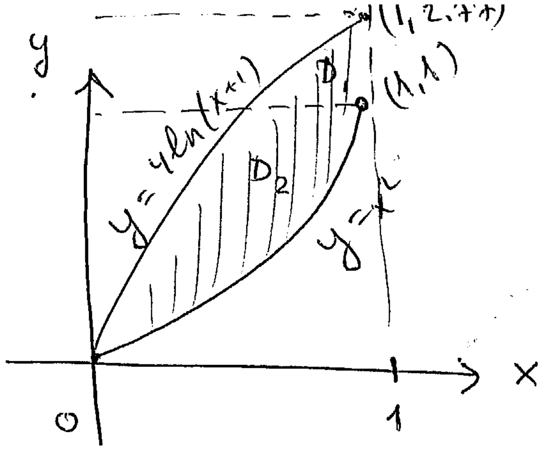
$$+\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 1 \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y} = -1, \quad y = -x$$

$$\frac{2x}{x^2+(-x)^2} = 1 \rightarrow$$

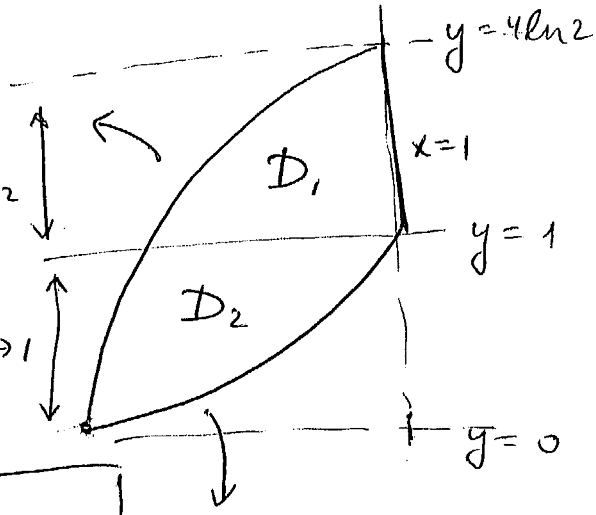
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}x^2} = 1 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}} \rightarrow$$

12



$x+1 = e^{\frac{y}{4}}$ $\leftarrow$ $y = 4\ln(x+1)$

$\underline{x = e^{y/4} - 1}$



$y = x^2 \Rightarrow \underline{x = \sqrt{y}}$

$$\boxed{I = \int_0^1 dy \int_{e^{\frac{y}{4}}-1}^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) + \int_1^{4\ln 2} dy \int_{e^{y/4}-1}^{1} dx\, f(x,y)}$$

6. נתון שדה וקטורי 8

$$\bar{F}(x,y) = \underbrace{\overbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{M}}\hat{i} + \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{N}\hat{j}$$

א. האם השדה משמר בתחום $x,y>0$?
אם כן, יש למצוא פוטנציאל

ב. יש לחשב

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כאשר P_1 נמצאת על חלק של
מעגל $x,y>0$ $x^2+y^2 = R_1^2$ $(R_1 \neq 0)$

ו P_2 נמצאת על מעגל ברדיוס R_2
באותם התנאים. מסלול האינטגרציה
נמצא כולו בתחום D.

א. בדיקת שדה משמר:

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial y} = \left(x\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial x} = \left(y\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x = y\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial x} = \frac{\partial M_\varphi}{\partial y}$$

כמו כן, רכיבי השדה והנגזרות רציפות לכל הנקודות במישור למעט הראשית, $(0,0)$. לכן השדה משמר בתחום $x,y>0$.

הפוטנציאל הנו

$$\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

ב. כיוון שהשדה פוטנציאלי משמר, ניתן להשתמש במשפט היסודי של אינטגרל קווי

$$\int_{P_1}^{P_2} \nabla\varphi\cdot dr = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \boxed{R_2 - R_1}$$

$\varphi(P_2)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ על מעגל $x^2+y^2=R_2^2$

$\varphi(P_1)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ על מעגל $x^2+y^2=R_1^2$