אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 17.08.09
מרצים: פרופ' **מ.** ברברמן, ד"ר ר. ליפיאנסקי
מועד ב: **חדר''א ג2**
מס' הקורס: 201.1.9151
סמ' ב משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר:**2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים), מחשב כיס עם צג קטן.**

(1) ענה על 5 מ-6 השאלות הבאות, נא לא לענות על יותר מ-5 שאלות, ציינו על עמוד הראשון של מחברת הבחינה על איזה שאלות אתם עונים,
(2) משקל כל שאלה 20 נקודות ,
(3) יש לפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. כל תשובה צריכה להיות מנומקת,
(4) לטיוטה יש להשתמש במחברת המצורפת לשאלון זה.

כל השאלות
אוף מ- 3

בהצלחה !

שאלות לבדיקה
1, 2, 4, 5, 6

שאלה מס' 1

א) (12 נק') מצאו את תחום התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^2}{2n+1}(x+2)^n$$

ב) (8 נק') חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $z=x^2y+y^2$ בנקודה $M(1,2)$ בכיוון של הווקטור $\overrightarrow{\mathbf{MM_1}}$ כאשר $M_1(3,0)$.

1) א) $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)^2}{2n+1}$ $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n(n+1)^2}{(2n+1)}\cdot\frac{2n+2}{(-1)^{n+1}(n+2)^2}\right| = \left|\frac{(-1)(n+1)^2}{(n+2)^2}\cdot\frac{(2n+2)}{(2n+1)}\right|$ (נוסחת דלמבר)

$\rightarrow 1$ $\rightarrow 1$

$\Rightarrow R^* = |-1| = |1|$ כלומר $\rightarrow (x+2) = |1| \Rightarrow$

מקרה א': $x+2=1$ $\Downarrow$ $x=-1$ קצה 1
מקרה ב': $x+2=-1$ $x=-3$ קצה 2

בדיקת קצוות: $x=-1$: $\frac{(-1)^n(n+1)^2}{2n+1}\cdot \cancel{(1)^n}$ 1

~~בהחלט~~ התכנסות: ? $\lim_{n\to\infty}\frac{(+1)^n(n+1)^2}{2n+1} \neq 0$ דרגה במונה גבוהה מהמכנה $\Downarrow$

אין התכנסות ~~בהחלט~~, תנאי הכרחי לא מתקיים
$\Downarrow$
לפי התנאי $\Leftarrow$
גם אין התכנסות בתנאי.
טור מתבדר ב $x=-1$.

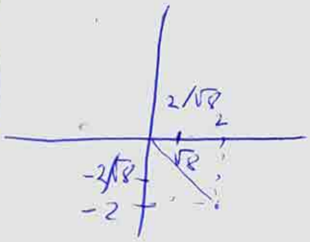
היה לציין שבקצוות לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות טורים

$x=-3$: $\frac{(-1)^n(n+1)^2}{2n+1}(-1)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n+1} = \infty \neq 0$ בקצה הזה גם הטור מתבדר

$\boxed{\text{תחום התכנסות: } -3<x<-1}$

$\checkmark$

$\frac{12}{12}$

$z = x^2y + y^2 \qquad M(1,2) \qquad \overrightarrow{MM_1} \qquad M_1(3,0)$  a

$\overrightarrow{MM_1} = (2,-2) \qquad \hat{MM_1} = \left(\frac{2}{\sqrt8}, \frac{-2}{\sqrt8}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{-1}{\sqrt2}\right)$

$\frac{dz}{d\hat{MM_1}} = 2xy\left(\frac{1}{\sqrt2}\right) + (x^2+2y)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt2}\right)$

$z_x = 2xy$

$z_y = x^2 + 2y$

$\frac{\partial z}{\partial \hat{MM_1}(1,2)} = \frac{4}{\sqrt2} + \frac{(1+4)\cdot(-1)}{\sqrt2} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt2}}$ V $\frac{8}{8}$

20

שאלה מס' 2

$M \quad N$

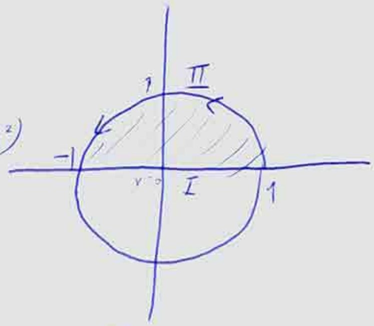
A **א) (10 נק')** חשבו **<u>בעזרת משפט גרין</u>** אינטגרל קווי מסוג שני $\mathbf{I} = \oint_\Gamma x^2 y dx - xy^2 dy$

כאשר Γ היא שפת התחום $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ בכיוון החיובי.

ב) (10 נק') חשבו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $z(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ בתחום $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$.

היה לכתוב נוסחת גרין

$$\int_{\text{חצי עיגול}} = \iint_D \left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) dx dy$$



$$\frac{dN}{dx} = -y^2 \qquad \frac{dM}{dy} = x^2 \qquad \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = -y^2 - x^2 = -(x^2+y^2) = -r^2$$

$$\int_{\text{חצי מעגל}} = \oint_{\text{חצי עיגול}} - I_{(x_{-1\to 1})}$$

$$\int_{\text{חצי עיגול}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (-r^2)\cdot r\,dr = \int_0^\pi d\theta\left[-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \int_0^\pi \left(-\frac{1}{4}\right) d\theta = -\frac{\theta}{4}\Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{4} \Leftarrow$$ אינטגרל של מסלול סגור V

~~$x^2 = t^2,\ y = t \quad dx = dt^2$~~

$$\int_{x_{-1\to 1}} = \int_{-1}^1 dx = x\Big|_{-1}^1 = 2$$

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{4} - 2}$$

3+1

צריך להוריד מהאינטגרל של המסלול הסגור את הקו שעובר בין -1 ל-(+1) כלומר היקף התחתון של חצי העיגול שווה 2 במקרה הזה

לא נכון

$\frac{8}{10}$

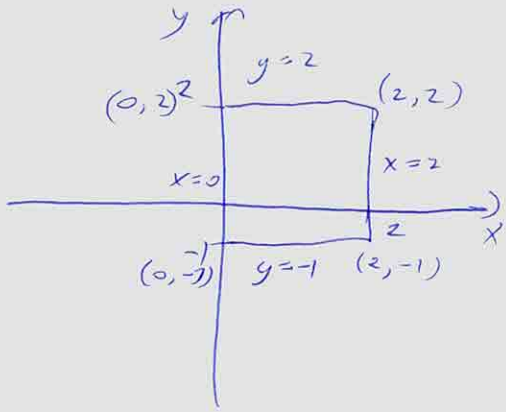
ב.

ב

$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$ $\quad z(x,y)\ \ x^3+y^3-3xy$

נק' חשודה
בתוך התחום!

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$x = y^2$

$y^4 - y = 0$

$y(y^3-1) = 0$

$y_{1,2} = 0,\ 1$

$x_{1,2} = 0, \pm 1$ (-1 לא בתחום)

קודקודים!

(x,y)	z
$(0,0)$	0
$(1,1)$	-1
$(\sqrt{2},2)$	2.343
$(2,\sqrt{2})$	2.343
$(0,2)$	8
$(2,2)$	$16-12=4$
$(2,-1)$	$8-1-3\cdot2\cdot(-1)=13$
$(0,-1)$	-1

שפה:

$y=2$:

$g = x^3+8-6x$

$g' = 3x^2-6=0 \Rightarrow 3x^2=6 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$x=2$: $g = 8+y^3-6y$

$g' = 3y^2-6 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2} = +\sqrt{2}$

$y=-1$: $g = x^3-1+3x \Rightarrow g' = 3x^2+3=0 \Rightarrow$

אין נק' חשודה

$x=0$: $g=y^3 \quad g'=3y^2=0 \quad y=0$ קיים

ערך מקסימלי: 13

'' מינימלי: -1

18/20

10/10

שאלה מס' 3

א) (10 נק') מצאו נפח של הגוף המוגבל ע"י משטחים הבאים:

$z = x^2 + y^2, \quad z = 1 - x^2 - y^2$,

ב) (10 נק') פונקציה $f(t)$ גזירה לכל t. חשבו ערך של הביטוי הבא:

$A = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{2x}{3}\dfrac{\partial u}{\partial y} - u$ כאשר $u(x,y) = x \cdot f(2x-3y)$.

שאלה מס' 4

א) **(10 נק')** החליפו סדר האינטגרציה באינטגרל כפול הבא:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\, dy$$

ב) **(10 נק')** מצאו משוואת מישור העובר דרך הישר $\begin{cases} 2x-y+3z-5=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$

במקביל לווקטור $\vec{a}\,(2,-1,-2)$

א'

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dy$$

$x^2+y^2=1$

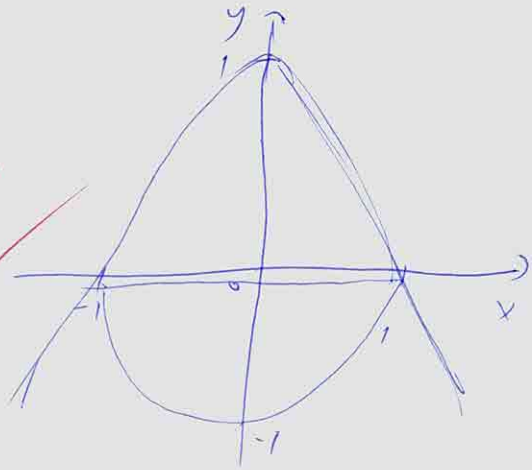
$x^2=1-y^2$

$x=\pm\sqrt{1-y^2}$

$y=1-x^2$

$x^2=1-y$

$x=\pm\sqrt{1-y}$



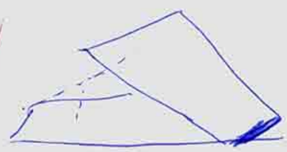
10/10

ב'

ישר: $N = (2,-1,3)\times(1,2,-1)$

וקטור כיוון ישר

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-6,\ -(-2-3),\ 4+1) = (-5,-5,5) \sim (-1,-1,1)$$



נקודות על ישר

$z=0: \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-2y-10=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases} +$

$5x-8=0 \quad x=\frac{8}{5},\ y=2x-5=\frac{16}{5}-\frac{25}{5}=-\frac{9}{5}$

נקודה על ישר: $\left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}, 0\right)$

$\bar{N} = (-1,-1,1)\times(2,-1,-2)$

מישור כדי להיות מאונך לשני הוקטורים שמקבילים למישור

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (2+1,\ 2-2,\ 3) = (3,0,3) = \bar{N}$$

משוואת מישור: $3\left(x-\frac{8}{5}\right)+3(z-0) = 3\left(x-\frac{8}{5}\right)+3z = P$

10/10

20/20

חוזר-

שאלה מס' 5

א) **(10 נק')** פתחו הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\cos^2\dfrac{x}{2}$ לטור חזקות בסביבת הנקודה $x=0$

מה תחום התכנסותו ?

ב) **(10 נק')** מצאו את המסה של העקומה $y=\dfrac{1}{2}x^2$ בין הנקודות $A(1,\dfrac{1}{2})$ ו- $B(2,2)$

כאשר הצפיפות מסה היא $\rho(x,y)=\dfrac{y}{x}$.

1א)

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos 2(x/2)}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{-1}{1-2x+x^2}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x^2+1} \qquad f'=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{(1-x)}{1}=\frac{x^2-x^3-1+x}{x^2+1}=$$

$$1-\frac{2}{x^2+1}=1-2\cdot\frac{1}{x^2+1} \qquad x^2=t$$

$$1-2\cdot\frac{1}{x^2+1}=1-2\cdot\frac{1}{t+1}$$

נחלק את הפונקציה ל-2: חלק 1:

$$\frac{1}{2}(1+\cos x)$$ חלק 2:

$$\cancel{\frac{1}{1+t}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(-1)^{n-1} \Rightarrow 1-2\frac{1}{1+t}=1-2\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cdot(-1)^{n+1}\right]}$$

שימוש בטור מקלורן של $\arctg x$

$$\arctan x'=\frac{1}{1+x^2}$$

טור מקלורן של

$$\arctg x=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$$

טור של

$$(\arctg x)'=\frac{2n+1}{2n+1}\cdot(-1)^n\cdot x^{2n}=(-1)^n\cdot x^{2n}$$

טור של $\cos x$

חלק 1: $1-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$ / חלק 2: $\frac{1}{2}\left(1+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot(-1)^n\right)$

$1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$

סעיף 1:

$1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot(-1)^n$

סעיף 2:

~~חלק 1+2:~~

חלק 1: תחום התכנסות של $\text{arctg}x$: $|x|<1$

של $\cos x$: $|x|<\infty$

$$\boxed{f(x)\sim 2-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}\cdot(-1)^n}$$

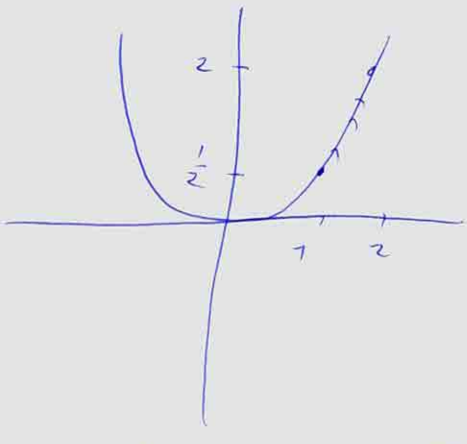
סעיף 2+1:

תחום התכנסות $|x|<1$

$x=t$

$y=\frac{1}{2}t^2$

$\rho(x,y)=\frac{y}{x}$ $\quad y=\frac{1}{2}x^2$



$\rho=\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}=\frac{1}{2}t=f(t)$

$m=\int_1^2 f(t)\cdot|r'(t)|\,dt=\int_1^2\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\,dt$

$f(t)=\frac{1}{2}t$

$r(t)=(t,\frac{1}{2}t^2)$ $\quad r'(t)=(1,t)$; $|r'(t)|=\sqrt{1+t^2}$

$M=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t}{t}s^2\,ds$ $\quad \sqrt{1+t^2}=s$ $\quad ds=\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}dt\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}ds$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\frac{s^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}=M}$$

שאלה מס' 6

א) **(10 נק')** מצאו נקודות קיצון של הפונקציה: $z(x, y) = -6xy + 8x^3 - 3y^2$.

ב) **(10 נק')** מצאו שני מישורים משיקים למשטח $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$ אשר מאונכים לישר $x = y = z$. מצאו את מרחק בין שני מישורים המשיקים האלה.

$z(x,y) = -6xy + 8x^3 - 3y^2$

$z_x = -6y + 24x^2$ $\quad z_{xx} = 48x$ $\quad z_{xy} = -6$

$z_y = -6x - 6y$ $\quad z_{yy} = -6$

$z_x = 0: \begin{cases} 24x^2 = 6y \\ -6x = 6y \end{cases} \Rightarrow 24x^2 + 6x = 0$

$z_y = 0:$

$4x^2 + x = 0$

$x(4x+1) = 0$

$x_{1,2} = 0, -\frac{1}{4}$

$x_2: 4x = -1$

$x_2 = -\frac{1}{4}$

$y_{1,2} = 0, \frac{1}{4}$

$\frac{6}{4} = 6y$

$y = \frac{1}{4}$

$(0,0), \left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right)$ נק' אוכפ

+

$D_{(0,0)} = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2 = 0 - 36 < 0$: $(0,0)$ אוכף

$D_{\left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right)} = (-12 \cdot -6) ~~-36~~ ~~-108~~ -36 = 36 > 0$

$z_{xx} = -12 < 0$

מקס'

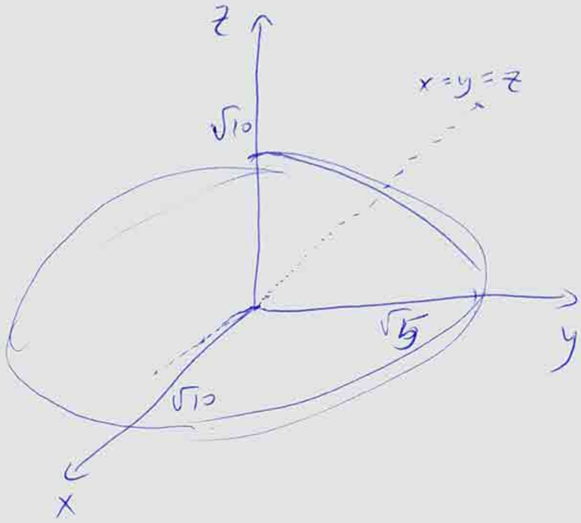
$(0,0)$ אוכף

$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ מקסימום

$u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 10$ $\quad x = y = z$

$\bar{a} = (1, 1, 1)$

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{10} = 1$$



$$\mathrm{grad}(u) = 2x\bar{i} + 4y\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$(2x, 4y, 2z) = t(1, 1, 1)$$

$$x = \frac{t}{2}$$

$$y = \frac{t}{4}$$

$$z = \frac{t}{2}$$

$4/16$

$$\frac{t^2}{4} + \frac{2t^2}{16} + \frac{t^2}{4} - 10 = 0$$

$$\frac{5}{8}\ \cancel{\frac{10}{16}}\ t^2 = 10$$

$$5t^2 = 80$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

נקודה מס' 1: $t = +4$: $(2, 1, 2)$

נקודה מס' 2: $t = -4$: $(-2, -1, -2)$

$P_1: (x-2) + (y-1) + (z-2) = 0$

$P_1: x + y + z - 5 = 0$

$P_2: (x+2) + (y+1) + (z+2) = 0$

$P_2: x + y + z + 5 = 0$

$+$

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{10}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$