מרצה:
ד"ר אל. ויידרמן
מתרגלת: טניה ויסמן

תדו"ן למערכות מידע

עמוד 1 מתוך 14

פתרונות תרגילים מס' 12

מבחן האינטגרל

II

(2.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ $\qquad a_n = f(n) = \frac{1}{n \cdot \ln n}$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \searrow (2, \infty)$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

$\ln x = t$ $\qquad x = 2 \Rightarrow t = \ln 2$

$dt = \frac{dx}{x}$ $\qquad x = \infty \Rightarrow t = \infty$

האינטגרל מתבדר, לכן הטור מתבדר.

(3.) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n \ln^2 n} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} \searrow (4, \infty)$

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{\ln 4}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} \Big|_{\ln 4}^{\infty} = -\frac{1}{t} \Big|_{\ln 4}^{\infty} = 0 + \frac{1}{\ln 4}$$

$\ln x = t$ $\qquad x = 4 \Rightarrow t = \ln 4$

$dt = \frac{dx}{x}$ $\qquad x = \infty \Rightarrow t = \infty$

האינטגרל מתכנס, לכן הטור גם מתכנס.

(5.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$ $\qquad a_n = \frac{\arctan n}{1+n^2}$

$f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$

כדי להיעזר במבחן האינטגרל, יש לבדוק כי $f(x)$ לא עולה ב $(1, \infty)$

מרצה. ל"ידרמן
מתרגלת עניה וקסמן

חדו"א למערכות מידע 2

פתרונות תרגילים מס' 12

II (5.)

המשך

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)-2x\cdot\arctan x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}<0$$

$x\in(1,\infty)$

$$\left(x=1 \Longrightarrow \frac{1-2\cdot1\cdot\frac{\pi}{4}}{(..)^2}=\frac{1-\frac{\pi}{2}}{(\quad)^2}<0 \quad \ldots\right)$$

$$f(x)\searrow \quad (1,\infty)$$

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{(\arctan x)^2}{2}\Big|_1^\infty=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

האינטגרל מתכנס, לכן גם הטור מתכנס.

III (1.) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}$ $\quad a_n \not\longrightarrow 0$

לכן הטור מתבדר.

(2.) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\ldots$

$$a_n=\sqrt[n]{0.001}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\neq0$$

הטור מתבדר

(3.) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\frac{1}{4\sqrt{5}}+\ldots \quad a_n=\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

נעזר במבחן ההשוואה

$$b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ $\quad \sum b_n$ מתכנס, לכן $\sum a_n$ מתכנס

מרצה: ד״ר ש. ליידרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

חדו״א למערכות מידע 2

עמוד 3 מתוך 14

פתרונות תרגילי 3 עד 12.

III (4.) $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\dots$

$a_n=\frac{1}{1000n+1} \qquad b_n=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{1000}$ $\quad \sum b_n$ מתבדר, לכן

$\sum a_n$ גם מתבדר (מבחן ההשוואה)

(5.) $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\dots \qquad a_n=\frac{2n-1}{2n+1} \qquad n=1,2,3,\dots$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\neq 0$ $\quad$ לכן $\sum a_n$ מתבדר

(6.) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots \qquad a_n=\frac{1}{(2n-1)^2}$

$b_n=\frac{1}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{4}$, $\sum a_n$ מתכנס

(לפי מבחן ההשוואה)

(7.) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots \qquad a_n=\frac{1}{2n-1}$,

$b_n=\frac{1}{n}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}$ $\quad \sum b_n$ מתבדר, לכן

$\sum a_n$ גם מתבדר (מבחן ההשוואה)

(8.) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}+\dots \qquad a_n=\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

$b_n=\frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}$. $\quad \sum b_n$ מתבדר, לכן

$\sum a_n$ גם מתבדר (מבחן ההשוואה)

מרצה: ד"ר א. ליפרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

פתרונות תרגילי 3 f 12

III (12.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5} \qquad a_n = \frac{1}{n^2-4n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftarrow b_n = \frac{1}{n^2}$$

$\sum b_n$ מתכנס, לכן $\sum a_n$ גם מתכנס (מבחן ההשוואה)

(13.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftarrow b_n = \frac{1}{n}$$

$\sum b_n$ מתבדר, לכן $\sum a_n$ גם מתבדר (מבחן ההשוואה)

(14.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}} \qquad a_n = \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftarrow b_n = \sqrt{\frac{n}{n^4}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum b_n$ מתכנס, לכן $\sum a_n$ גם מתכנס

IV מבחן דלמבר

(1.) $$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots \qquad a_n = \frac{n}{2^n}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

$\sum a_n$ מתכנס.

(2.) $$\frac{1!}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \dots \qquad a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\cdot 10^n}{10^{n+1}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty > 1$$

$\sum a_n$ מתבדר

מרצה ד"ר א. פליידמן
מתרגלת טניה וקסמן

פתרונות תרגילי 3 ל 12

IV

(3.) $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\dots \qquad a_n=\frac{1000^n}{n!}$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{1000^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 1000^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1$$

$\sum a_n$ מתכנס

(4.) $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\dots \qquad a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(n+1)!\cdot(2n)!}{(2n+2)!\;n!\;n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

$\sum a_n$ מתכנס.

V

מבחן קושי

(1.) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\dots \qquad a_n=\frac{1}{\ln^n(n+1)}$

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$$

$\sum a_n$ מתכנס

(2.) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\dots \qquad a_n=\frac{n^n}{(2n+1)^n}$

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

$\sum a_n$ מתכנס.

(3.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \qquad a_n=\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1\cdot e}{2}=\frac{e}{2}>1$$

$\sum a_n$ מתבדר.

חדו"א למערכות מידע 2

מרצה: ד"ר א. פלדמן
מתרגלת: טטה וקסמן

עמוד 6 תרגיל 14

פתרונות תרגילי דף 12

VI כל המבחנים

(1.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$ $\quad a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$

נעזר במבחן ההשוואה

$b_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ $\quad \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

$\sum b_n$ מתכנס, לכן $\sum a_n$ גם מתכנס.

(2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ $\quad a_n = \frac{n}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$

אינו מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות הטורים,
$\sum a_n$ מתבדר.

(3.) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$, $\quad a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ $\quad$ הטור $\sum a_n$ מתבדר

(4.) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ $\quad a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \searrow 0$ $\quad x \geq 10$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_{10}^{\infty} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{(\ln x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{10}^{\infty} =$$

$$= 2\sqrt{\ln x}\Big|_{10}^{\infty} = \infty$$

$\sum a_n$ מתבדר

מרצה ד"ר א. לייזרמן
מתרגלת טניה וקסמן

אבו"א למערכות מידע 2
עמוד 7 אוגוסט 14

פתרונות תרגיל 3 ל-12

$\underline{V1}$ (5.) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ $\quad a_n = \frac{n^2+1}{n^3}$

נעזר במבחן ההשוואה

$b_n = \frac{1}{n} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Σb_n מתבדר, לכן
Σa_n גם מתבדר

(6.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$ $\quad a_n = \frac{n}{1000n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1000} \neq 0$ הטור מתבדר

(7.) $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ $\quad a_n = \frac{2n-1}{3^n}$

נעזר במבחן ד'אלמבר

$D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2^n} = \frac{1}{3} < 1$

Σa_n מתכנס.

(8.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ $\quad a_n = \frac{2^n}{n^4}$ $\quad K = \lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{\lim(\sqrt[n]{n})^4} = 2 > 1 \Rightarrow$ הטור מתבדר (מבחן קושי)

(9.) $\displaystyle\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$ $\quad a_n = \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$

נעזר במבחן ההשוואה

$b_n = \frac{1}{n^2} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{20}$

Σb_n מתכנס,
לכן Σa_n גם מתכנס

(10.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ $\quad a_n = \frac{3^n}{n\cdot 2^n}$

$K = \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}\cdot 2} = \frac{3}{2} > 1$

הטור מתבדר (מבחן קושי)

חדו"א למערכות מידע 2

מרצה: א.ל. פרידמן
מתרגלת: טטה וקסמן

עמוד 8 עד 14

פתרונות תרגילי דף 12

$\sqrt{1}$ (11.) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\quad a_n = \frac{n!}{n^n}$

נעזר במבחן דלמבר

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

הטור מתכנס

(12.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-3}{3n^2+1}\right)^n$ $\quad a_n = \left(\frac{4n^2-3}{3n^2+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \neq 0$$

הטור מתבדר

הערה: אפשר להיעזר במבחן קושי:

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-3}{3n^2+1} = \frac{4}{3} > 1$$

(13.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ $\quad a_n = \frac{n^2}{n!}$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^2 \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^2} = \lim \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

הטור מתכנס

(14.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} = \frac{\sqrt[n]{e}}{n^2}$

נעזר במבחן ההשוואה

$b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = 1$$

$\sum b_n$ מתכנס, לכן $\sum a_n$ גם מתכנס.

מרצה: א. לייפרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

חדו"א למערכות מידע 2
עמוד 9 תוך 14

פתרונות תרגילי $12 f_3$

טורים מחלפי סימן

$\sqrt{11}$

(1.) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$

$b_n=\frac{1}{n}\searrow 0$, הטור הוא טור לייבניץ, לכן מתכנס

(2.) $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$

$b_n=\frac{1}{(2n-1)^3}\searrow 0$, הטור הוא טור לייבניץ, לכן מתכנס

(3.) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\dots=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}b_n$

$b_n=\frac{1}{\ln n}\searrow 0$ טור לייבניץ, מתכנס

(5.) $1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$

$b_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}\searrow 0$ טור לייבניץ, מתכנס

(7.) $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\dots=\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum(-1)^n\cdot b_n$

$b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\searrow 0$ טור לייבניץ, לכן מתכנס

(9.) $\frac{1}{3\ln^2 3}-\frac{1}{4\ln^2 4}+\frac{1}{5\ln^2 5}-\dots=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$

$b_n=\frac{1}{n\ln^2 n}\searrow 0$, טור לייבניץ, לכן מתכנס

חדו"א למערכות מידע 2

מרצה: א. פליידרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

פתרונות תרגול 12

$\overline{\text{VIII}}$ טורי חזקות

$$\sum_1^{\infty} a_n x^n \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad , \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

1. $$10x + 100x^2 + 1000x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = 10^n \qquad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{10}$$

בקטע $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ הטור מתכנס. נבדוק קצוות.

$x = \frac{1}{10}$ $\quad 10\cdot\frac{1}{10} + 100\cdot\frac{1}{10^2} + 1000\cdot\frac{1}{10^3} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$ $\quad a_n = 1 \not\to 0$

הטור מתבדר

$x = -\frac{1}{10} \implies -1 + 1 - 1 + \dots$ $\quad a_n \not\to 0$

הטור מתבדר

תשובה: $R = \frac{1}{10}$, תחום ההתכנסות $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$

2. $$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} \qquad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$R = 1$ נבדוק התכנסות בקצוות הקטע $(-1, 1)$.

$x = 1$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ מתכנס, טור לייבניץ

$x = -1$ $\quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

הטור מתבדר.

תשובה $R = 1$ תחום ההתכנסות $(-1, 1]$

3. $$1 + \frac{x}{3\cdot 2} + \frac{x^2}{3^2\cdot 3} + \frac{x^3}{3^3\cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n\cdot n}{3}} = 3$$

מרצה: א. פליידרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

חדו"א למערכות מידע 2

עמוד 11 עד 14 <u>פתרונות תרגול 12</u>

$\overline{VIII}$ 3. המשך

$R=3$ נבדוק קצוות הקטע $(-3,3)$

$x=3 \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ הטור מתבדר

$x=-3 \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ הטור מתכנס כטור לייבניץ

תשובה: $R=3$, תחום ההתכנסות $[-3,3)$ $(-3\le x<3)$

5. $$(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$$

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 4^{n-1}} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4}{n\cdot 4^n}}=\frac{1}{4}$$

$R=4$

$-4<x+1<4$, נבדוק את הקצוות

$x+1=4 \quad 4+\frac{4}{2}+\frac{4}{3}+\dots=4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הטור מתבדר

$x+1=-4 \quad -4+\frac{4}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{4}-\dots=+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ הטור מתכנס כטור לייבניץ

$$-4\le x+1<4$$
$$-5\le x<3, \quad R=4$$

4. $$1-\frac{x^2}{5\sqrt{2}}+\frac{x^4}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^6}{5^3\sqrt{4}}+\frac{x^8}{5^4\sqrt{5}}-\dots=$$

$x^2=t$ נעשה הצבה

$$=1-\frac{t}{5\sqrt{2}}+\frac{t^2}{5^2\sqrt{3}}-\frac{t^3}{5^3\sqrt{4}}+\frac{t^4}{5^4\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot t^n$$

$$a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{5^n\sqrt{n+1}} \qquad R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n\cdot\sqrt{n+1}}$$ או

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\sqrt{n+2}}{5^n\cdot\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}5\cdot\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=5$$

חדו"א למערכות מידע 2

מרצה: ד"ר א. לייזרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

עמוד 12 מתוך 14

פתרונות לתרגול 12

המשך VIII

(4.) $R_t = 5$ $\quad R_{x^2} = 5 \quad R_x = \sqrt{5}$

נבדוק קצוות הקטע

$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

$x^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$ מתכנס כטור לייבניץ

$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

תשובה:

$R = \sqrt{5} \qquad -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

(6.) $$\frac{x-3}{1} - \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} - \frac{(x-3)^4}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$$

$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad R = \lim \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = 1$

$R = 1$ נבדוק קצוות הקטע

$-1 < x-3 < 1$

$x-3 = 1 \qquad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ מתכנס כטור לייבניץ

$x-3 = -1 \qquad -1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס

תשובה: $R = 1$ הטור מתכנס כאשר $-1 \le x-3 \le 1$ אז

$2 \le x \le 4 \longrightarrow$ תחום ההתכנסות בהחלט

(7.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$R = \infty$ תחום ההתכנסות $(-\infty, \infty)$ בהחלט

מרצה: ד"ר א. לויצרמן
מתרגלת: טניה וקסמן

חדו"א למערכות מידע 2

שבוע 13 וגם 14

פתרונות לתרגול 12

$\overline{VIII}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n! = 1 + 2!\,x + 3!\cdot x^2 + \ldots =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \quad . \quad a_n = (n+1)!$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$

$R = 0$ תחום התכנסות $x = 0$.

$\overline{IX}$ 1. $f(x) = \ln(x+2) = \ln 2\left(1 + \frac{x}{2}\right) =$

$= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \ldots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad R = 1 \quad |x|$

$-1 < x \le 1$

עבור טור שלנו

$-2 < x \le 2$

$R = 2 \quad -1 < \frac{x}{2} \le 1 \implies$

הטור מתכנס כאשר $\ln(x+2)$

$-2 < x \le 2$

$\ln(x+2) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^n \cdot n} + \ldots$

3. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

ידוע לנו כי

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad R = 1 \quad |x| < 1$

$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \ldots\right) =$

$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \quad |x| < 3$

$= \frac{1}{3} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{3^4} + \ldots \quad R = 3$