

1. חשב את האינטגרלים:

א)  $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy$     ב)  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy$

כאשר  $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$     2. חשב את האינטגרל  $\int_a^A \int_b^B f(x, y) dy dx$

3. באינטגרל הכפול  $\iint_D f(x, y) dx dy$  הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה:

- א. כאשר  $D$  משולש בעל הקודקודים  $B(1,1), A(1,0), O(0,0)$
- ב. כאשר  $D$  משולש בעל הקודקודים  $B(-2,1), A(2,1), O(0,0)$
- ג. כאשר  $D$  טרפז בעל הקודקודים  $C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0)$
- ד. כאשר  $D$  עיגול  $x^2 + y^2 \leq 1$
- ה. כאשר  $D$  עיגול  $x^2 + y^2 \leq y$
- ו. כאשר  $D = \{(x, y) | y \leq 1, y \geq x^2\}$
- ז. כאשר  $D$  טבעת  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
- ח. כאשר  $D$  הוא התחום החסום על ידי הקווים  $xy = -1, y = -x, x = -2, x = -0.5$
- ט. כאשר  $D = \{(x, y) | x+y \leq 2, y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2, y \geq -2\}$
- י. כאשר  $D$  הוא תחום משותף של העיגול  $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 1$  והמשולש בעל הקודקודים  $B(4,0), A(0,4), O(0,0)$
- יא. כאשר  $D$  הוא תחום משותף של העיגול  $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$  והמשולש בעל הקודקודים  $B(2+\sqrt{2}, 0), A(0, 2+\sqrt{2}), O(0,0)$
- יב. כאשר  $D$  הוא תחום משותף של העיגול  $x^2 + y^2 \leq 10$  והמשולש בעל הקודקודים  $C(5,0), B(-3,-4), A(-3,4)$

4. החלף סדר האינטגרציה באינטגרלים הכפולים:

א)  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$     ב)  $\int_{-6}^2 dx \int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x, y) dy$     ג)  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$     ד)  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$

ה)  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$     ו)  $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0)$     ז)  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$

5. חשב את האינטגרלים הבאים:

- א.  $\iint_D xy^2 dx dy$  כאשר  $D$  חסום ע"י הפרבולה  $y^2 = 4x$  והישר  $x=1$
- ב.  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}$  כאשר  $D$  חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של המעגל בעל הרדיוס 2 שמרכזו בנקודה  $(2,2)$ .
- ג.  $\iint_D |xy| dx dy$  כאשר  $D$  עיגול בעל הרדיוס  $a \quad (a > 0)$  שמרכזו בראשית.
- ד.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  כאשר  $D$  מקבילית בעלת הצלעות  $(a > 0), y=3a, y=a, y=x+a, y=x$

6. באינטגרל הכפול  $\iint_D f(x, y) dx dy$  עבור לקואורדינטות קוטביות והצב את הגבולות האינטגרציה:

- א. כאשר  $D$  עיגול  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $(a > 0)$ .
- ב. כאשר  $D$  עיגול  $x^2 + y^2 \leq ax$ ,  $(a > 0)$ .
- ג. כאשר  $D$  טבעת  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ ,  $(0 < a < b)$ .
- ד. כאשר  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ .
- ה. כאשר  $D = \{(x, y) | (x^2/a) \leq y \leq a, -a \leq x \leq a\}$ ,  $(a > 0)$ .
- ו. כאשר  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ .

7. חשב ע"י מעבר לקואורדינטות קוטביות:

a)  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$       b)  $\iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$

8. חשב את האינטגרלים הבאים:

a)  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x|+|y|) dx dy$       b)  $\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$

c)  $\iint_D xy dx dy$  כאשר  $D$  חסום ע"י  $x+y=2.5$ ,  $xy=1$

10. חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים הבאים:

- א)  $x+y=2, x^2-4y=4$       ב)  $xy=a^2, x+y=\frac{5}{2}a, (a > 0)$       ג)  $x^2+y^2=2x, y=0, y=x\sqrt{3}$
- ד)  $x+y=3, y^2=4x$       ה)  $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, y=x, y=x\sqrt{3}, (x \geq 0)$
- ו)  $x^2+4y^2=16$       ז)  $y^2=2x+1, y^2=-8x+16$

11. חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים:

- 11.1)  $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$
- 11.2)  $x+y+z=3, z=0, x^2+y^2=1, x=0, y=0, (x \geq 0, y \geq 0)$
- 11.3)  $z=0, z=x^2+y^2, y=1, y=x^2$

12. חשב את המסה של **לוחות**  $D = \{(x, y) | y \leq 1, y \geq x^2\}$  אם צפיפות הממברנה  $f(x, y) = y$

תשובות

1. א) 1      ב) 1/40

2.  $F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b)$

3.

$$א) \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y) dx \quad ב) \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x,y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y) dx$$

$$ג) \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y) dx$$

$$ד) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$$

$$ה) \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{0.5-\sqrt{0.25-x^2}}^{0.5+\sqrt{0.25-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y) dx \quad ו) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx$$

$$ז) \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$$

$$ח) \int_{-2}^{-1} dx \int_{-1/x}^{-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^{-0.5} dx \int_{-x}^{-1/x} f(x,y) dy =$$

$$= \int_1^2 dy \int_{-2}^{-y} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{-1/y}^{-0.5} f(x,y) dx + \int_{0.5}^1 dy \int_{-2}^{-1/y} f(x,y) dx + \int_{0.5}^1 dy \int_{-y}^{-0.5} f(x,y) dx$$

$$ט) \int_0^1 dx \int_{-2}^{x^2} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_{-2}^{2-x} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y) dx + \int_{-2}^0 dy \int_0^2 f(x,y) dx$$

$$י) \int_1^2 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2-3}}^{4-x} f(x,y) dy = \int_2^3 dy \int_{2-\sqrt{6y-y^2-8}}^{4-y} f(x,y) dx$$

$$יא) \int_0^1 dx \int_{0}^{1+\sqrt{1+2x-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2+\sqrt{2-x}} f(x,y) dy + \int_2^{1+\sqrt{2}} dx \int_{1-\sqrt{1+2x-x^2}}^{2+\sqrt{2-x}} f(x,y) dy$$

$$יב) \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^3 dx \int_{(x-5)/2}^{(5-x)/2} f(x,y) dy + \int_3^{\sqrt{10}} dx \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} f(x,y) dy$$

4.

$$א) \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y) dx \quad ב) \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y) dx$$

$$ג) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dx \quad ד) \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) dx \quad ה) \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$$

$$ו) \int_a^{2a} dy \int_{y^2/(2a)}^{2a} f(x,y) dx + \int_0^a dy \int_{y^2/(2a)}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx \quad ז) \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y) dx$$

5. א)  $32/21$     ב)  $8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$     ג)  $\frac{a^4}{2}$     ד)  $14a^4$

6.

א)  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$     ב)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

ג)  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$     ד)  $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/(\cos \theta + \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

ה)  $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

ו)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_{1/\cos \theta}^{2/\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

7. א)  $2\pi a^3/3$     ב)  $-6\pi^2$     8. א)  $4/3$     ב)  $2\pi ab/3$     ג)  $1 - \frac{37}{128} - \ln 2$

10. א)  $64/3$     ב)  $a^2 \left( \frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right)$     ג)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$     ד)  $64/3$     ה)  $\pi/8$     ו)  $8\pi$     ז)  $20/3$

11.1.  $5/6$     11.2.  $\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}$     11.3.  $88/105$     12.  $m = 0.8$

פתרונות

1. א)  $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \int_0^1 (xy + y^2/2) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (x + 1/2) dx = \dots$

ב)  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy = \int_0^1 \frac{xy^3}{3} \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) dx = \dots$

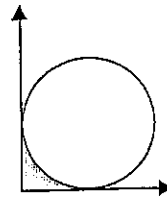
ג)  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \sin^2 \theta dr = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \dots$

2.  $\int_a^A dx \int_b^B f(x,y) dy = \int_a^A dx \int_b^B (F'_x)'_y dy = \int_a^A \left( F'_x \Big|_{y=b}^{y=B} \right) dx = \int_a^A (F'_x(x, B) - F'_x(x, b)) dx = \dots$

מספר ה: 737  
 מספר הקו: 8737

$$5. \kappa) \iint_D xy^2 dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2/4}^1 xy^2 dx$$

$$\begin{aligned} \text{ב)} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}} &= \int_0^2 dx \int_0^{2-\sqrt{4x-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{4-x}} \\ &= \int_0^2 \frac{2-\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{4-x}} dx = \int_0^2 \frac{2 dx}{\sqrt{4-x}} - \int_0^2 \sqrt{x} dx \end{aligned}$$



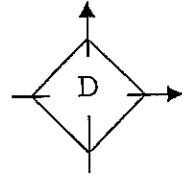
$$\lambda) \iint_D |xy| dx dy = 4 \int_0^a x dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy$$

$$\tau) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx$$

$$7. \kappa) \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r r dr$$

$$\text{ב)} \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr$$

$$8. \text{a)} \iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x|+|y|) dx dy = 4 \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy$$



$$\text{b)} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} a b r dr$$

$$x = a r \cos \theta, y = b r \sin \theta$$

$$10. \kappa) S = \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} dy \quad \text{ב)} S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{2.5a-x} dy$$

$$\lambda) S = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r dr \quad \tau) S = \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx$$

$$11.1. V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1+x+y) dy$$

$$11.2. V = \iint_D (3-x-y) dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (3-r \cos \theta - r \sin \theta) r dr$$

$$11.3. V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \quad 12. m = \iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy$$