סמסטר אביב 2006 | המרצה: ד"ר א. שטיינרמן
עמוד 1 מתוך 3 | המתרגלת: טניה וקסמן
חדו"א למערכות מידע 2

תרגול 3

הנושא: פונקציות רבות משתנים

1) תחום ההגדרה

2) קווי הרמה, משטחי הרמה

3) גבול של פונקציה. גבולות חוזרים, גבולות כפולים.

I נתונה פונקציה $f(x,y)=x^2y+\frac{y^2}{x}$. חשב:

a) $f(1,-1)$ b) $f(\frac{1}{3},2)$ c) $f(y,x)$, d) $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ e) $f(-x,-y)$

תשובות:

a) 0 b) $\frac{110}{9}$ c) $\frac{xy^3+x^2}{y}$ d) $\frac{x^3+y}{x^2y^2}$ e) $-x^2y-\frac{y^2}{x}$

II מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1. $f(x,y)=x+\sqrt{y}$
2. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$
3. $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$
4. $h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
5. $k(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$
6. $g(x,y)=\ln(-x-y)$
7. $v(x,y)=\ln(-x+y)$
8. $u(x,y,z)=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$

תשובות:

1. $y\geq 0$ 2. $|x|\leq 1, |y|\geq 1$ 3. $x^2+y^2\leq 1$ 4. $x^2+y^2>1$

5. $1\leq x^2+y^2\leq 4$ 6. $x+y<0$ 7. $y>x$ 8. $x^2+y^2+z^2\leq a^2$

III בנה את קווי הרמה (קווי הגובה) של הפונקציות הבאות:

1. $g(x,y)=x+y$ 2. $f(x,y)=x^2+y^2$ 3. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

4. $h(x,y)=(x+y)^2$ 5. $g(x,y)=\frac{y}{x}$ 6. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+2y^2}$

7. $v(x,y)=\sqrt{xy}$ 8. $f(x,y)=1-|x|-|y|$

סמסטר אביב 2006

מועד 2 מתוך 3 — מבחן 3 (המשך) — המתבצעת טניה וקסמן, ד"ר א. פ"דרמן

המרצה: ד"ר א. פ"דרמן

תשובות:

III

1. $x+y=c$ ישרים מקבילים

2. $c \geq 0$, $x^2+y^2=c$ מעגלים

3. $x^2+y^2=4-c^2$, $0 \leq c \leq 2$ מעגלים

4. $x+y=\pm\sqrt{c}$, $c \geq 0$ ישרים מקבילים

5. אלומת ישרים $y=cx$ חלק הראשון

6. $\dfrac{x^2}{1/c}+\dfrac{y^2}{1/(2c)}=1$, $c>0$ משפחת אליפסות

7. $\{c=0 : y=0 \text{ או } x=0\}$, $\{c \neq 0 : xy=c^2\}$ משפחת היפרבולות

8. $|x|+|y|=c_1$, $c_1=1-c$, $c_1 \geq 0$ ריבועים

IV מצא את משטחי הרמה (משטחי הגובה) של הפונקציות הבאות:

1. $f(x,y,z)=x+y+z$ 2. $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

3. $f(x,y,z)=e^{2x+3y-z}$

תשובות:

1. $x+y+z=c$ משפחת משורים מקבילים

2. $c \geq 0$, $x^2+y^2+z^2=c$ משפחת כדורים

3. $2x+3y-z=c_1$, $c_1=\ln c$, $c>0$ משפחת משורים מקבילים.

V 1. הוכח כי עבור הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

מתקיים:

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=-1, \quad \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=1$$

ואולם הגבול

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \quad (x,y)\to(0,0)$$

אינו קיים

המרצה: ד"ר א. לייזרמן, מתרגלת גניה יקסמן, סמסטר אביב 2006

חדו"א למערכות מידע 2 — תרגול 3 — עמוד 3 מתוך 3

IV

2. הוכח כי קבור הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=0$$

ובכל זאת הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ אינו קיים.

3. הוכח כי קבור הפונקציה

$$f(x,y)=(x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$$

שני הגבולות החוזרים $\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}$, $\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}$ אינם קיימים ואולם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ קיים ושווה 0.

VI חשב את הגבולות הכפולים

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y\cdot\sin x}{x}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{4})} \frac{tg\, y}{\cos x}$
3. $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy+y-2x-2}{x+1}$
4. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$
5. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} arctg\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
7. $\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$
8. $\lim \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
9. $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$

תשובות:

1. 1 2. 1 3. 0 4. 0 5. 2

6. $\frac{\pi}{2}$ 7. 0 8. 0 9. a