מרצה : ד"ר א. ל"דרמן ,מתרגלת טניה וקסמן

חדו"א למערכות מידע 2 (201-1-9761)

סמסטר אביב 2006

תרגיל 5

הנושא : פונקציות רבות משתנים

1) נגזרות חלקיות של סדר 2

2) גרדיאנט, נגזרת כיוונית.

3) משוואת מישור משיק ונורמל למשטח

4) דיפרנציאביליות של פונקציות 2 משתנים

I חשב את הנגזרות מסדר ראשון ושני של הפונקציות המורכבות הבאות:

1. $u = f(x^2+y^2+z^2)$ 2. $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$

3. $u = f(x+y, xy)$ עבור חשב את $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

4. הוכח כי הפונקציה $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ (a, b – קבועים) מקיימת את משוואת לפלס

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

II הוכח את השוויונים הבאים בהנחה כי הפונקציות φ, ψ דיפרנציאביליות מספר פעמים כנדרש.

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ כאשר $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\quad u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$

3) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\quad u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\psi\left(\frac{y}{x}\right)$

המרצה: ד"ר א. לייברמן המתרגלת טניה ויקסמן
חדו"א למערכות מידע 2
תרגול 5

שדה סקלרי. גרדיאנט. נגזרת מכוונת

1. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון $\bar{a}=6\bar{i}+8\bar{j}$.
2. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u=xy^2z^3$ בנקודה $M(3,2,1)$ בכיוון $\bar{a}=(2,2,1)$.
3. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z=x^2-y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה-X.
4. הוכח שהנגזרת המכוונת של $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ בנקודה $M(x,y,z)$ כלשהי בכיוון מ-M לראשית שווה ל- $(-2u/r)$, כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
5. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=xe^{|\bar{r}|}$, $(\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})$ בנקודה $(0,1,0)$.
6. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ בנקודה $(1,1,1)$.
7. מצא נקודות שבהן הגרדיאנט של השדה הסקלרי $z=\sin(x+y)$ שווה ל- $\bar{i}+\bar{j}$.
8. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=xyz$ וכיוון שלו בנקודה $M(2,1,1)$.
9. א. מצא את כיוון בו קצב ההשתנות של השדה הסקלרי $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ בנקודה $M(1,2,1)$ הוא מקסימלי
ב. מצא את הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של u בנקודה $M(1,2,1)$.
10. חשב את הנגזרת של הפונקציה $z=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית α עם הציר ה-X. באיזה כיוון הנגזרת זו מקבלת א) ערך גדול ביותר? ב) ערך קטן ביותר? ג) הערך 0?
11. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u=xyz$ בנקודה $M(1,1,1)$ בכיוון $\bar{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. מהו גודל הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה זו?
12. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M_0(-4,3)$ בכיוון הנורמל לקו הגובה העובר דרך M_0.
13. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=3x^2+5y^2+z^2$ העובר דרך הנקודה $M_0(1,-1,\ 2)$ ונגזרת מכוונת של הפונקציה $u(x,y,z)$ בנקודה M_0 בכיוון הנורמל למשטח רמה (α).

המרצה ד"ר א.פיידרמן

המתרגלת טניה ויסמן

עמוד 3 מתוך 5

סמסטר אביב 2006

חדו"א למערכות מידע 2

תרגול 5

IV

משוואת מישור משיק ונורמל למשטח

כתוב את משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

1) $f(x,y)=x^2+y^2\,,\ x_0=1,\ y_0=2$ 2) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2}\,,\ x_0=3,\ y_0=1$

כתוב את משוואת הנורמל לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

3) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}\,,\ x_0=1,\ y_0=1$ 4) $f(x,y)=\dfrac{y+\ln x}{2}\ ,\ x_0=1,\ y_0=1$

כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=0$ בנקודה M :

5) $x^2+y^2+z^2=169\,,\ M(3,4,12)$ 6) $2^{x/z}+2^{y/z}=8\,,\ M(2,2,1)$

7. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+2y^2+3z^2=21$ המקביל למישור $x+4y+6z=0$.

8. הוכח כי המשטחים הבאים

$$(S_1):\ \ x^2+y^2+z^2=a\,x$$
$$(S_2):\ \ x^2+y^2+z^2=b\,y$$
$$(S_3):\ \ x^2+y^2+z^2=c\,z$$

כאשר $a,b,c\neq 0$ מאונכים זה לזה בכל נקודות חיתוך שלהם (הערה: שני משטחים מאונכים אם נורמלים שלהם מאונכים).

9. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ העובר דרך הנקודה $M_0(2,4,10)$. כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח רמה (α) בנקודה M_0 .

תשובות

I 1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot f'(x^2+y^2+z^2)$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cdot f'+4x^2\cdot f''$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\,f''(x^2+y^2+z^2)$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(x,\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{y}f_2'\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-x}{y^2}f_2'\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f_{12}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f_{22}''\left(x,\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{-x}{y^2}f_{12}''\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}''\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2'\left(x,\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}f_{22}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y^3}f_2'\left(x,\frac{x}{y}\right)$$

עמוד 4 מתוך 5

המרצה: ד"ר א. ליידרמן
המתרגלת: טניה ויקסמן

סמסטר אביב
2006

חדו"א 2 למערכות מידע

תרגיל 5

III

תשובות

1) 1.4 2) $22\frac{2}{3}$ 3) $1-\sqrt{3}$ 5) $e\,\bar{i}$ 6) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 7) $y=-x+2\pi k\,,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

8) $\operatorname{grad} u\big|_{(2,1,1)}=(1,2,2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

9) $\operatorname{grad} u\big|_{(1,2,1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\max\frac{\partial u}{\partial l}(M)=\frac{\sqrt{6}}{3}$

10) $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$ א. $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ב. $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ ג. $\alpha_1=\frac{3\pi}{4}\,,\ \alpha_2=\frac{7\pi}{4}$

11) $\frac{\partial u}{\partial l}(M)=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$, $|\operatorname{grad} u\|_M=\sqrt{3}$ 12) 0.4

13) $3x^2+5y^2+z^2=12$, $grad\,u\,(1,-1,2)=(6,-10,4)$, $|\,grad\,u\,(1,-1,2)\,|=2\sqrt{38}$

IV

1) $2x+4y-z=5$ 2) $3x-y-z=4$ 3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

4) $x-1=y-1=\frac{z-0.5}{-2}$ 5) $3x+4y+12z=169$ 6) $x+y-4z=0$

7) $x+4y+6z=21\,,\ x+4y+6z=-21$

9) $2x+4y-z=10$

המרצה: ד"ר א. לייזרמן

המתרגלת: טניה וקסמן

חדו"א למערכות מידע 2

תרגול 5

דיפרנציאביליות של פונקציות רבות משתנים V

1) חשב את $f'_x(x,1)$ כאשר

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

2) חשב את $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ כאשר $f(x,y)=\sqrt[3]{x\cdot y}$.

האם הפונקציה f דיפרנציאבילית בנק' $(0,0)$?

3) האם הפונקציה $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$?

4) האם הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & , x^2+y^2>0 \\ 0 & , x^2+y^2=0 \end{cases}$$

דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$?

תשובות V

1. $f'_x(x,1)=1$
2. $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ הפונ' אינה דיפרנציאבילית בנק' $(0,0)$
3. הפונקציה אינה דיפרנציאבילית ב$(0,0)$
4. הפונקציה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$