אוניברסיטת בן- גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן: ______________

תאריך הבוחן: 14/05/2006
שם המרצים: ארקדי ליידרמן
בוחן ב: חדו"א למערכות מידע 2
מס' הקורס: 201-1-9761
מיועד לתלמידי: מערכות מידע
שנה: א' סמ': ב' מועד: אחד
משך הבוחן: 2 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד, מחשב כיס עם צג קטן

יש לענות על כל 4 שאלות. כל שאלות הבוחן הן שווי משקל. המשקל של בוחן בציון הסופי של קורס הוא 10%.

1. במרחב נתונות 4 נקודות: $A(1,1,1);\ B(0,3,2);\ C(4,1,2);\ D(2,3,-2)$
(א) מצאו את משוואת המישור שעובר דרך 3 נקודות A, B, C.
(ב) מצאו את הנפח של הפירמידה ABCD ומצאו את המרחק מהנקודה D עד המישור ABC.
(ג) נקודה E היא סימטרית לנקודה D ביחס למישור ABC. מצאו את הקואורדינטות של הנקודה E.

2. תהי פונקציה $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית. נגדיר את פונקציה מורכבת

$$u(t,s,p)=f\,(t^2-s^2,s^2-p^2,p^2-t^2).$$

יש לחשב $\frac{\partial u}{\partial t}(t,s,p)\,ps+\frac{\partial u}{\partial s}(t,s,p)\,pt+\frac{\partial u}{\partial p}(t,s,p)\,ts$.
ולפשט את הביטוי המתקבל.

3. תהי מוגדרת הפונקציה $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-1)+y+6z$.
(א) מצאו את הכיוון שלפיו הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $M(1,1,0)$ מקבלת ערך מקסימלי
ומצאו את הכיוון שלפיו הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $M(1,1,0)$ מקבלת ערך מינימלי.
(ב) רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח רמה שעובר דרך הנקודה $M(1,1,0)$ עבור הפונקציה $f(x,y,z)$.

4. תהי מוגדרת הפונקציה הבאה

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(א) הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה (0,0).
(ב) חקרו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (0,0).

בהצלחה !

1 (א) נרשום וקטורים:

$$\overline{AB} = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

$$\overline{AC} = 3\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k}$$

וקטור נורמל למישור:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \det\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k} = 0$$

$$2(x-1) + 4(y-1) - 6(z-1) = 0$$

$$\boxed{x + 2y - 3z = 0}$$

המישור ABC

(ב) $\overline{AD} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$

נפח

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{28}{6} = \boxed{\frac{14}{3}}$$

מרחק

$$h = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)(-3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \boxed{\sqrt{14}}$$

(ג) המשוואה הפרמטרית של קו ישר המאונך למישור ABC שעובר דרך הנקודה D:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

נמצא נקודה D':

D': היטל של נקודה D על המישור ABC:

$$(2+t) + 2(3+2t) - 3(-2-3t) = 0$$

$$14 + 14t = 0 \Rightarrow t = -1$$

$A = D'(1,1,1)$, $D(2,3,-2)$;

לכן, $\overline{D'D} = -\overline{D'E}$

$$\boxed{E(0, -1, 4)}$$

② פונקציה $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, לכן אפשר להשתמש בכלל שרשרת

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,s,p) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\cdot(-2t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(t,s,p) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-2s) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 2s + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial p}(t,s,p) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(-2p) + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 2p$$

לכן

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot ps + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot pt + \frac{\partial u}{\partial p}\cdot ts = 0$$

③ (א)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2x}{x^2+y^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{2y}{x^2+y^2-1}+1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=6$$

גרדיאנט של פונקציה בנקודה $M(1,1,0)$ הוא

$$(\nabla f)_{M(1,1,0)}=2\bar{i}+3\bar{j}+6\bar{k}$$

$$|\nabla f|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$$

הנגזרת המכוונת מקבלת ערך מקסימלי לפי כיוון

$$\bar{l}_1=\frac{2}{7}\bar{i}+\frac{3}{7}\bar{j}+\frac{6}{7}\bar{k}$$

- ערך מינימלי לפי כיוון

$$l_2=-\left(\frac{2}{7}\bar{i}+\frac{3}{7}\bar{j}+\frac{6}{7}\bar{k}\right)$$

(ב) המישור המשיק למשטח רמה בנקודה M הוא

$$2(x-1)+3(y-1)+6z=0$$

$$\boxed{2x+3y+6z-5=0}$$

(4) (א) $|\sin x| \le |x|$ לכל x, לכן

$$|f(x,y)| = \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |\sin x| \le |x|$$

לכל x,y.

לכן לפי משפט "סנדוויץ'"

$$\begin{matrix} x \to 0 \\ y \to 0 \end{matrix} \Rightarrow f(x,y) \to 0$$

צ"ל

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$$

(ב)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

נסמן

$$\Delta z = \frac{(\Delta y)^2 \sin(\Delta x)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

מכאן

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta y)^2 \sin(\Delta x)}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \ne 0$ כי במסלול $\Delta x = \Delta y$ מתקיים:

$$\varepsilon = \frac{\sin(\Delta x)}{2^{3/2}\,\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{1}{2^{3/2}} \ne 0$$

<u>המסקנה:</u> פונקציה <u>לא</u> דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.