

מקצוע : הסתברות למדעי המחשב
 מס' קורס : 20112391
 המרצה: דניאל ברנד
 לובה ספיר
 מועד א': ז' אדר א' ה'תשע"ד
 7/2/2014
 משך המבחן: 3 שעות
 חמר עזר: ללא הגבלה, אך ללא מחשבון

הנחיות: ענה על סעיפי המבחן. כל הסעיפים שווי משקל, ויבחרו 15 הסעיפים בעלי הניקוד הגבוה ביותר. בכל סעיף 5 טענות, מהן בדיוק אחת נכונה. בכל סעיף בפני עצמו עליך לבחור באחת משתי האפשרויות:

1. לענות על הסעיף, ע"י כתיבת מספר הטענה הנכונה במקום המתאים בדף תשובות זה.
2. לוותר על הסעיף.

הניקוד: תשובה נכונה עבור כל סעיף מזכה ב- $\frac{2}{3}$ נקודות, תשובה שגויה - ב-0 נקודות, ויתור - ב- $\frac{2}{3}$ נקודות, כל סימון אחר (כגון שתי טענות או טענה ויתור) - ב-0 נקודות.

התשובות:

| שאלה 1 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|--------|-------------------|----------------|
| א. | 3 | |
| ב. | 2 | |
| ג. | 4 | |
| ד. | 2 | |
| ה. | 3 | |
| ו. | 2 | |

| שאלה 2 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|--------|-------------------|----------------|
| א. | 5 | |
| ב. | 4 | |
| ג. | 3 | |

| שאלה 3 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|--------|-------------------|----------------|
| א. | 4 | |
| ב. | 1 | |
| ג. | 1 | |
| ד. | 3 | |
| ה. | 3 | |

| שאלה 4 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|--------|-------------------|----------------|
| א. | 3 | |
| ב. | 4 | |
| ג. | 1 | |
| ד. | 4 | |

שים לב: רק צל זה יילקח בתום המבחן. את צפי השאלות תוכל לקחת

הנה צחח!

שאלה 1

עורכים ניסוי בן שני שלבים, כדלהלן. בשלב הראשון מטילים מטבע עד אשר יתקבל "ראש" בפעם הראשונה. נניח שמספר ההטלות בשלב הראשון הינו k , באשר k שלם חיובי כלשהו. אזי, בשלב השני משתמשים ב- k מטבעות. מטילים כל אחת מהמטבעות האלה עד אשר היא מראה "ראש" בפעם הראשונה. יהי X מספר ההטלות בשלב הראשון ו- Y מספר ההטלות בשלב השני. (לדוגמא, נניח שבשלב הראשון המטבע הראתה "זנב" בחמש ההטלות הראשונות ו"ראש" בהטלה הששית. בשלב השני, מטבע הראשונה הראתה "ראש" בהטלה הראשונה, המטבעות השניה, השלישית, הרביעית והחמישית הראו, כל אחת, "ראש" לראשונה בהטלה השניה, והמטבע הששית הראתה "ראש" בפעם הראשונה בהטלה ה-100. אזי $X = 6$ ו- $Y = 109$).

א. ההתפלגות המותנית של Y בהינתן X הינה:

- א.1. אחידה.
- א.2. בינומית.
- א.3. בינומית שלילית.
- א.4. פואסונית.
- א.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ב. $E(Y | X = x) =$

- ב.1. x .
- ב.2. $2x$.
- ב.3. 2^{x-1} .
- ב.4. 2^x .
- ב.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ג. $P(X = 1 | Y = 2) =$

- ג.1. $\frac{1}{6}$.
- ג.2. $\frac{1}{3}$.
- ג.3. $\frac{1}{2}$.
- ג.4. $\frac{2}{3}$.
- ג.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ד. $P(Y = X) =$

ד.1. $\frac{1}{6}$

ד.2. $\frac{1}{3}$

ד.3. $\frac{1}{2}$

ד.4. $\frac{2}{3}$

ד.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ה. לכל j שלם חיובי,

$P(Y = j) =$

ה.1. $\frac{3^{j-1}}{4^{j+1}}$

ה.2. $\frac{3^j}{4^{j+1}}$

ה.3. $\frac{3^{j-1}}{4^j}$

ה.4. $\frac{3^j}{4^j}$

ה.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ו. נניח עתה כי חוזרים על הניסוי הדו-שלבי n פעמים. יהי Y_i מספר ההטלות

בשלב השני של הניסוי ה- i , $1 \leq i \leq n$. אזי, עבור n מספיק גדול:

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \leq 4\right) \approx$$

ו.1. 0.25

ו.2. 0.5

ו.3. 0.75

ו.4. 0.95

ו.5. אף לא אחת מהנ"ל.

שאלה 2

ראובן ושמעון משחקים במשחק ה- n -שלבי הבא. בכל שלב, מסובבים רולטה רציפה הנותנת מספר בקטע $[0,1]$ (לפי התפלגות אחידה). נסמן ב- x_k את המספר שהתקבל בשלב ה- k עבור $1 \leq k \leq n$. בכל שלב k , אם $x_k > x_i$ לכל $1 \leq i \leq k-1$, ראובן מקבל משמעון שקל אחד, אם $x_k < x_{k-1} < x_{k-2} < \dots < x_2 < x_1$ הרי שמעון מקבל מראובן 2^k שקלים. נסמן ב- R_n את סך הכסף שהרויח ראובן, וב- S_n את סך הכסף שהרויח שמעון.

לדוגמא, נניח כי $n = 10$ וכי $x_k = \frac{1}{k+1}$ עבור $1 \leq k \leq 5$, $x_6 = \frac{6}{10}$, $x_7 = \frac{7}{10}$, $x_8 = \frac{1}{10}$,

$x_9 = \frac{2}{10}$ ו- $x_{10} = \frac{9}{10}$. אזי ראובן מקבל שקל אחד בכל אחד מבין השלבים 1, 6, 7, ו-10.

10, כלומר $R_{10} = 4$. שמעון מקבל במקרה זה 2^k שקלים בכל אחד מחמשת השלבים הראשונים ואינו מקבל מאומה בשלבים האחרים. כלומר $S_{10} = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$. שים לב, כי בשלב הראשון, ללא תלות בתוצאות, ראובן, מקבל שקל אחד ושמעון מקבל שנים.

א. עבור n מספיק גדול נקבל כי $P(S_n = 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \mid R_n = 1) =$

א.1. $\frac{1}{n!}$

א.2. $\frac{2}{n!}$

א.3. $\frac{2^n}{n!}$

א.4. $\frac{1}{n}$

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ב. $E(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

ב.1. $e - 1$

ב.2. e

ב.3. e^2

ב.4. ∞

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

$$E(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{ג.}$$

ג.1. e

ג.2. $e + 1$

ג.3. $e^2 - 1$

ג.4. ∞

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

שאלה 3

נתונים מ"מ ב"ת $Z_i \sim N(0,1)$, $1 \leq i \leq 100$. נגדיר משתנים מקריים $Y = Z_1^2$ ו-

$$T = \sum_{i=1}^{100} Z_i$$

א. שימוש ישיר באי-שוויון מרקוב מראה כי האי-שוויון $P(Y \geq a) \leq 0.01$ מתקיים

עבור

א.1. 10

א.2. 50

א.3. 80

א.4. 100

א.5. אף לא אחד מהנ"ל.

הערה: הכוונה כאן לתוצאה הטובה ביותר שניתן להשיג. לדוגמא, אם מאי-שוויון מרקוב נובע כי $P(Y \geq a) \leq 0.01$ עבור $a \geq 10$, אזי הוא לבטח נכון עבור כל שאר האפשרויות, אך עליך לציין רק את א.1 כתשובה הנכונה.

ב. Y מתפלג

ב.1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ב.2. $\Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ב.3. $\Gamma(2,2)$

ב.4. $Exp(1)$

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

תזכורת לפונקציית גמא:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \alpha > 0$$

ג. $E(T^2) =$

ג.1. 100

ג.2. 10

ג.3. 0

ג.4. אינה קיימת.

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ד. $P(T^2 \leq 100) \approx$

1.ד .0.8413

2.ד .0.7673

3.ד .0.6826

4.ד .0.5239

5.ד אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ה. נסמן $W = \min(Z_1, Z_2)$ ו- $S = \max(W, Z_3^3)$ אזי $F_S(0) =$

1.ה $\frac{9}{16}$

2.ה $\frac{1}{2}$

3.ה $\frac{3}{8}$

4.ה $\frac{1}{8}$

5.ה אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

שאלה 4

(X, Y) הינו מ"מ בעל פונקציה צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 2, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור קבוע מתאים $c > 0$. אזי

א. $P(X+Y \leq 1 | X-Y \geq 0) =$

א.1. $\frac{1}{16}$

א.2. $\frac{1}{6}$

א.3. $\frac{1}{4}$

א.4. $\frac{1}{2}$

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ב. המשתנים המקריים X ו- Y הינם

א.1. בלתי תלויים.

א.2. תלויים אך בלתי מתואמים.

א.3. מתואמים חיובית (כלומר, $Cov(X, Y) > 0$).

א.4. מתואמים שלילית (כלומר, $Cov(X, Y) < 0$).

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ג. $V(X) =$

ג.1. $\frac{19}{12}c - \frac{4}{9}c^2$

ג.2. $\frac{19}{12}c - \frac{5}{12}c^2$

ג.3. $\frac{19}{12}c$

ג.4. $\frac{5}{2}c^2$

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ד. נסמן $Z = \min(X, Y)$. אזי עבור $0 \leq t \leq 1$

1.ד $\cdot F_Z(t) = 1 - (1-t) \cdot \frac{3-2t}{5}$

2.ד $\cdot F_Z(t) = 1 - (1-t)^2 \cdot \frac{3-2t}{5}$

3.ד $\cdot F_Z(t) = 1 - \frac{3-2t}{5}$

4.ד $\cdot F_Z(t) = 1 - \frac{3}{5}(1-t)^2$

5.ד אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ה ה פ צ ה ה !