

מקצוע : הסתברות למדעי המחשב  
 מס' קורס : 20112391  
 המרצה: דניאל ברנד  
 לובה ספיר  
 בוחן אמצע: י"ז טבת תשע"ד  
 20/12/2013  
 משך הבוחן: שעתיים  
 חמר עזר: ללא הגבלה, אך ללא מחשבון

הנחיות: ענה על סעיפי המבחן. כל הסעיפים שווי משקל, ויבחרו 10 הסעיפים הטובים ביותר. בכל סעיף 5 טענות, מהן בדיוק אחת נכונה. בכל סעיף בפני עצמו עליך לבחור באחת משתי האפשרויות:  
 1. לענות על הסעיף, ע"י כתיבת מספר הטענה הנכונה במקום המתאים בדף תשובות זה.  
 2. לוותר על הסעיף.  
 הניקוד: תשובה נכונה עבור כל סעיף מזכה ב-10 נקודות, תשובה שגויה - ב-0 נקודות, ויתור - ב-2.5 נקודות, כל סימון אחר (כגון שתי טענות או טענה ויתור) - ב-0 נקודות.

התשובות:

שאלה 1	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	5	
ב.	2	
ג.	3	

שאלה 2	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	1	
ב.	2	

שאלה 3	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	3	
ב.	3	
ג.	4	
ד.	3	

שאלה 4	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	4	
ב.	3	
ג.	1	

ג ה 3 ח ה !

## שאלה 1

בפרדוקס ה"מקבץ" (או ה"רצף") שנלמד בכתה, המשחק מסתיים כאשר מתקבל ההימור "11" של השחקן הראשון או ההימור "01" של השחקן השני. יהי  $Y$  אורך המשחק.

$$E(2^Y) = \text{א.}$$

א.1. 8 .

א.2.  $(1 + \ln 2)^4$  .

א.3.  $2^{32} + 1$  .

א.4.  $2^{32} + 2$  .

א.5. התוחלת אינה קיימת.

ב. אם ההסתברות ל"1" הינה  $0 < p < 1$  ול-"0" הינה  $1-p$ , האם קיים ערך  $p$  כך שההסתברות לנצחון של השחקן הראשון שווה לזו של השני?

ב.1. לא קיים ערך כזה בקטע  $(0,1)$  .

ב.2. קיים ערך יחיד כזה בקטע  $(0,1)$  והוא מספר אי-רציונלי.

ב.3. קיים ערך יחיד כזה בקטע  $(0,1)$  והוא מספר רציונלי.

ב.4. קיים יותר מערך אחד כזה בקטע  $(0,1)$ , וכל אחד מערכים אלה הינו אי-רציונלי.

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ג. נחזור למצב בו ההסתברות ל-"1" שווה להסתברות ל-"0" והינה 0.5. כעת משחקים את המשחק פעמיים. יהי  $Z$  אורך שני המשחקים ביחד. אזי

$$P(Z = 7) =$$

ג.1.  $\frac{1}{16}$  .

ג.2.  $\frac{3}{32}$  .

ג.3.  $\frac{1}{8}$  .

ג.4.  $\frac{5}{32}$  .

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

## שאלה 2

$X$  הינו מ"מ בעל פונקציה צפיפות:

$$\text{א. } f_X(x) = \begin{cases} c \cdot \cos 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$P\left(X \geq \frac{\pi}{8}\right) =$$

א.1.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

א.2.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$

א.3.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

א.4.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

$$\text{ב. } f_X(x) = \begin{cases} c(e^{-2x} + x^2 e^{-x}), & x \geq 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$c =$$

ב.1.  $\frac{2}{7}$

ב.2.  $\frac{2}{5}$

ב.3.  $\frac{5}{2}$

ב.4.  $\frac{7}{2}$

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

### שאלה 3

כד מכיל כדורים מ- $n$  צבעים שונים, כדלהלן: כדור אחד מצבע מספר 1, שני כדורים מצבע מספר 2, ארבעה כדורים מצבע מספר 3, וכך הלאה עד  $2^{n-1}$  כדורים מצבע מספר  $n$ . מוציאים מהכד שני כדורים עם החזרה (כלומר: מוציאים כדור, מחזירים אותו, ומוציאים שוב כדור). נניח ש- $n$  מספיק גדול. אזי

א. ההסתברות ששני הכדורים בעלי אותו צבע הינה בערך

א.1.  $\frac{1}{2^4}$ .

א.2.  $\frac{1}{2^3}$ .

א.3.  $\frac{1}{3}$ .

א.4.  $\frac{1}{2}$ .

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ב. נניח שהתקבלו שני כדורים בעלי אותו צבע. ההסתברות ששניהם בעלי צבע מספר  $n$  הינה בערך

ב.1.  $\frac{1}{2}$ .

ב.2.  $\frac{2}{3}$ .

ב.3.  $\frac{3}{4}$ .

ב.4.  $\frac{5}{6}$ .

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ג. במקום שני כדורים אנו מוציאים עתה מהכד  $2^n$  כדורים עם החזרה. יהי  $X$  מספר הפעמים שנבחר הכדור בעל צבע מספר 1. אזי  $X$  מתפלג:

ג.1. בערך אחיד.

ג.2. בערך היפרגיאומטרי.

ג.3. בערך גיאומטרי.

ג.4. בערך פואסוני.

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ד. בתנאי חלק ג, יהי  $Y$  מספר הכדורים שלא הופיעו אפילו פעם אחת בכל  $2^n$

השלבים. אזי  $E(Y) \approx$

ד.1.  $\log_2 n$ .

ד.2.  $2^{\sqrt{n}}$ .

ד.3.  $\frac{2^n}{e}$ .

ד.4.  $2^{n-1}$ .

ד.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

#### שאלה 4

שיכור נמצא בזמן 0 בנקודה 0 על ציר המספרים. בכל שניה השיכור מבצע בהסתברות  $\frac{2}{3}$  צעד בגודל יחידה ימינה (בכוון החיובי של הציר) ובהסתברות  $\frac{1}{3}$  צעד בגודל יחידה שמאלה (בכוון השלילי של הציר).

א. יהי  $X_{10}$  מיקום השיכור על הציר בזמן 10. אזי פונקציית ההתפלגות של  $X_{10}$  מקיימת

$$F_{X_{10}}(8) =$$

א.1.  $8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

א.2.  $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3}$

א.3.  $\left(\frac{2}{3}\right)^9$

א.4.  $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

א.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ב. נניח שהשיכור מתגורר בנקודה 5 – על הציר. אזי ההסתברות לכך שלא יגיע הביתה אף פעם הינה:

ב.1.  $1 - \frac{1}{3^5}$

ב.2.  $1 - \frac{1}{3^4}$

ב.3.  $1 - \frac{1}{2^5}$

ב.4.  $1 - \frac{1}{2^4}$

ב.5. אף לא אחת מהנ"ל.

ג. נניח שהשיכור מקבל פרס, שגודלו תלוי בטיול, כדלהלן: אם ב-  $n$  השניות הראשונות כל הצעדים שלו היו ימינה ובשניה ה-  $n+1$  הוא זז שמאלה, אזי הוא מקבל  $n$  שקלים. (בפרט, אם הצעד הראשון שלו היה שמאלה אז הפרס שלו הוא 0.) יהי  $Y$  גודל הפרס. אזי

$$E(Y) =$$

ג.1. 2.

ג.2. 3.

ג.3. 4.

ג.4. 6.

ג.5. אף לא אחת מהנ"ל.

הנה ציור הנ"ל!