תאריך הבחינה:

שם המורה: פרופ' אמנון בסר

מבחן ב: מבנים אלגבריים 2

שנה *סמ'* *מועד* דוגמה

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

יש לענות על 4 מ- 6 השאלות. יש לענות בצורה ברורה ולנמק כל תשובה, להסביר כל צעד במהלך הפתרון ולציין את המשפטים והטענות עליהם מסתמכים. משקל כל שאלה 25 נקודות.

בהצלחה!

<u>שאלה 1</u>

מצא מטריצה אלכסונית D כך שקיימת מטריצה הפיכה P עבורה

$$P^tDP = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ -4 & 11 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>שאלה 2</u>

יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $a, b \in R$.

א.(5 נקודות) הוכח כי תמונת a בחוג $R/(b)$ ((b) הוא האידאל הנוצר על ידי b) היא הפיכה אם ורק אם תמונת b ב- $R/(a)$ היא הפיכה.

ב.(20 נקודות) הוכח כי אם התנאים השקולים בסעיף א' מתקיימים אז

$$[R/(a)] \otimes_R [R/(b)] = 0.$$

<u>שאלה 3</u>

א.(5 נקודות) הגדר קטגוריה.

ב. תאר בצורה מפורשת את הגבול הישר של דיאגרמה של חבורות אבליות $M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots$ כלומר הדיאגרמה שבה לכל $i \in \mathbb{N}$ יש הומומורפיזם $\alpha_i : M_i \to M_{i+1}$.

ג.(15 נקודות) יהיו $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{L}$ שלש דיאגרמות כמו בסעיף ב'. מורפיזם $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$ מורכב מהומומורפיזמים של חבורות אבליות $f_i : M_i \to N_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$ כך שלכל i הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i^M"'] & N_i \arrow[d, "\alpha_i^N"] \\ M_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & N_{i+1} \end{tikzcd}$$

סדרה של שני מורפיזמים $\mathbf{L} \to \mathbf{N} \to \mathbf{M}$ נקראת מדויקת ב- $\mathbf{N}$ אם לכל $i \in \mathbb{N}$ הסדרה $M_i \to N_i \to L_i$ מדויקת ב- N_i. הוכח כי במצב כזה הסדרה $\varinjlim \mathbf{M} \to \varinjlim \mathbf{N} \to \varinjlim \mathbf{L}$ מדויקת ב- $\varinjlim \mathbf{N}$.

<u>שאלה 4</u>

א.(5 נקודות) הגדר נתריות של מודול M מעל חוג קומוטטיבי R.

ב.(5 נקודות) הוכח: אם נתונה סדרה קצרה מדויקת של מודולים מעל R

$$0 \to M \to N \to L \to 0$$

ו- N נוצר סופית אז גם L נוצר סופית.

ג.(10 נקודות) הוכח: אם נתונה סדרה קצרה מדויקת כמו בסעיף ב' אז N נתרי אם ורק אם M ו- L נתריים.

ד.(5 נקודות) הוכח: אם R נתרי אז M נתרי אם ורק אם הוא נוצר סופית.

<u>שאלה 5</u>

יהי R חוג מקומי עם אידאל מקסימלי $\mathcal{M}$. הוכח כי חוג טורי החזקות הפורמליים $R[[x]]$ הוא מקומי (רמז: התבונן ב- $I = \left\{ \sum a_n x^n \ , \ a_0 \in \mathcal{M} \right\}$.)

<u>שאלה 6</u>

הוכח: אם נתונה הדיאגרמה הקומוטטיבית הבאה של חבורות אבליות,

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 & \end{tikzcd}$$

שבה שתי השורות הן סדרות מדויקות, וההומומורפיזמים α_1 ו- α_3 הם על, אז גם α_2 הוא על.