מבנים אלגבריים 2, תרגיל 2

<u>שאלה 1</u>
יהי K שדה ויהי $R = M_{n\times n}(K)$ חוג המטריצות $n \times n$ מעל K. למרחב הוקטורי K^n יש מבנה של מודול מעל R המתקבל מהכפלה של מטריצה בוקטור. הוכח כי למודול זה אין אף תת מודול שאינו טריוויאלי, כלומר כל המודול או תת מודול ה- 0.

<u>שאלה 2</u>
הוכח כי המכפלה הטנזורית של שני R מודולים A, B נוצרת מעל R על ידי הקבוצה

$$\{a \otimes b\ ,\ a \in A\ ,\ b \in B\}$$

תוך שמוש בתכונה האוניברסלית של המכפלה הטנזורית ולא בבניה המפורשת שלה.

<u>שאלה 3</u>
הוכח כי לכל חוג קומוטטיבי R ומודולים M N ו- K מעל R מתקיים

$$.M \otimes_R (N \oplus K) \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R K)$$

<u>שאלה 4</u>
יהיו R ו- S חוגים קומוטטיביים ו- $\alpha : R \to S$ הומומורפיזם של חוגים. יהי M מודול מעל R. הוכח כי ל- S-מודול $S \otimes_R M$ יחד עם ההעתקה $t : M \to S \otimes_R M$ של R-מודולים המוגדרת על ידי $t(m) = 1 \otimes M$ כאשר $1 \in S$ הוא איבר היחידה של S יש את התכונה האוניברסלית הבאה: לכל S-מודול N ולכל העתקה של R-מודולים $f : M \to N$ קיימת ויחידה העתקה של S-מודולים $g : S \otimes_R M \to N$ כך שהדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"] & N \\ S \otimes_R M \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

מתחלפת.

<u>שאלה 5</u>
א. תהי $\underline{C}$ קטגוריה בעלת אובייקט סופי T. הוכח כי לכל $X \in \underline{C}$ קיים איזומורפיזם $X \cong X \times T$
ב. נסח והוכח תוצאת דומה עבור אובייקט תחילי.