1. הוכיח: אם A היא קבוצה קמורה ו $A+A=A$, אז $0\in\overline{A}$.

ההוכחה. נניח $a\in A$. מכיוון ש- $A+A=A$, אפשר לייצג a כ- $a=b+c$, ו- $b,c\in A$. מכיוון ש- A היא קבוצה קמורה ו- $b,c\in A$, $\frac{a}{2}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\in A$. קיבלנו:
אם $a\in A$, גם $\frac{a}{2}\in A$, לכן $\frac{a}{4}\in A$, $\frac{a}{8}\in A$,…, $\frac{a}{2^k}\in A$, דהיינו קיבלנו סדרה ב- A ששואפת ל 0. זאת אומרת $0\in\overline{A}$

2. נתונות שתי קבוצות קמורות A ו B . הוכיח ש
$$C=\bigcap_{x\in B}\bigcup_{\lambda\geq 1}((1-\lambda)x+\lambda A)$$
היא קבוצה קמורה.

ההוכחה. ניקח $x\in B$ ונוכיח ש- $D=\bigcup_{\lambda\geq 1}((1-\lambda)x+\lambda A)$ היא קבוצה קמורה, אז C כחיתוך של קבוצות קמורות גם קבוצה קמורה.
ניקח שתי נקודות ב- D y ו- z ונוכיח ש- $v=\alpha y+(1-\alpha)z\in D$ אם $0\leq a\leq 1$.
$y\in D$ דהיינו קיימות $\lambda_y\geq 1$ ו- $a_y\in A$ ש- $y=(1-\lambda_y)x+\lambda_y a_y$.
$z\in D$ דהיינו קיימות $\lambda_z\geq 1$ ו- $a_z\in A$ ש- $z=(1-\lambda_z)x+\lambda_z a_z$.
יש להוכיח ש- v אפשר לייצג כ- $v=(1-\lambda_v)x+\lambda_v a_v$ איפה $\lambda_v\geq 1$ ו- $a_v\in A$.
$v=\alpha y+(1-\alpha)z=(\alpha(1-\lambda_y)+(1-\alpha)(1-\lambda_z))x+\alpha\lambda_y a_y+(1-\alpha)\lambda_z a_z$.
$(\alpha(1-\lambda_y)+(1-\alpha)(1-\lambda_z))=1-\alpha\lambda_y-(1-\alpha)\lambda_z$.
נסמן $\lambda_v=\alpha\lambda_y-(1-\alpha)\lambda_z$ ו- $\lambda_v a_v=\alpha\lambda_y a_y+(1-\alpha)\lambda_z a_z$. ברור ש- $\lambda_v\geq 1$, ו- $a_v=\frac{1}{\lambda_v}(\alpha\lambda_y a_y+(1-\alpha)\lambda_z a_z)$ היא קומבינציה קמורה של נקודות a_x ו- , a_y דהיינו $a_v\in D$.

3. כתוב את הבעיה של תכנון ליניארי שמאפשרת לברר האם אפשר לייצג את הוקטור $b\in E^n$ כקומבינציה קמורה של הוקטורים הנתונים $a^1,a^2,\ldots,a^m\in E^n$

הפתרון:
וקטור b הוא קומבינציה קמורה של הוקטורים $a^1,a^2,\ldots,a^m$ אם קיימים המספרים $x_1,\ldots,x_m$ ש-
$$b=\sum_{i=1}^{m}x_i a^i$$
$$x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1$$

נוסיף משתנים מלאכותיים: וקטור $y \in E^n$ ועוד משתנה אחד z ונרשום את הבעיה של תכנון ליניארי (בעיה A):

$$\min \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + z\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a^i + y = b$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i + z = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in 1{:}m,$$
$$y_j \geq 0, \quad j \in 1{:}n,$$
$$z \geq 0.$$

אם הערך המינימלי בבעיה A הוא אפס אז y ו- z הם אפסים ווקטור b הוא קומבינציה קמורה של הוקטורים $a^1, a^2, ..., a^m$.
אם הערך המינימלי בבעיה A חיובי אז אי אפשר לייצג את הוקטור $b \in E^n$ כקומבינציה קמורה של הוקטורים הנתונים $a^1, a^2, \ldots, a^m \in E^n$

4. תן דוגמא של זוג בעיות דואליות שאין בהן שום וקטור אפשרי .

דוגמה:
בעיה פרימלית:

$$\max\ (x_1 + 2x_2)$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2.$$

ברור שאין וקטור אפשרי ב בעיה פרימלית.

בעיה דואלית

$$\begin{aligned}
&\min\ (y_1 + 2y_2)\\
&y_1 + y_2 = 1\\
&y_1 + y_2 = 2
\end{aligned}$$

גם אין וקטור אפשרי ב בעיה דואלית.

5. נתונות שתי מטריצות A ו- B , שתיהן עם m שורות ו- n עמודות וקיימים מספרים $\lambda \geq 0$ ו-c שלכל $i \in 1{:}m,\ j \in 1{:}n$ $b_{ij} = \lambda a_{ij} + c$. ערכי המשחקים עם מטריצות A ו- B הם val(A) ו-val(B) . הוכח ש- $val(B) = \lambda\ val(A) + c$.

הפתרון:

נסמן ב$V_A(x,y)$ רווח של השחקן הראשון במשחק עם מטריצה A אם השחקנים משתמשים באיסטרטגיות מעורבות שלהם x ו y ונסמן ב$V_B(x,y)$ רווח של השחקן השני. אז

$$V_B(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + c) x_i y_j =$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + c \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + c \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j =$$

$$= \lambda\ V_A(x,y) + c$$

בגלל ש-$\lambda \geq 0$ נקודת אוכף של פונקציה $V_A(x,y)$ היא גם נקודת אוכף של פונקציה $V_B(x,y)$ זאת אומרת שאיסטרתגיות אופטימליות של השחקנים x^*, y^* במשחק עם מטריצה A הן גם שאיסטרתגיות אופטימליות של השחקנים במשחק עם מטריצה B. זה נובע:

$$val(B) = V_B(x^*, y^*) = \lambda\ V_A(x^*, y^*) + c = \lambda\ val(A) + c.$$

6. במפעל ישנן m מכונות שמייצרות n סוגי מוצר. המכונה i יכולה ליצר a_{ij} קג' מוצר j בשעה. הוצאות העבודה של המכונה i במוצר j הן c_{ij} דולר בשעה. המכונות עובדות 8 שעות ביום. הביקוש היומי במוצר j הוא b_j .

א. כתוב את הבעיה של תכנון ליניארי על מנת לחשב כמה זמן צריכה ליצר כל מכונה את כל מוצר כדי לספק הכמות הדורשת בכל מוצר ולצמצם ההוצאות.
ב. כתוב את הבעיה דואלית לבעיה זו.

הפתרון:
א. נסמן ב x_{ij} מספר השעות שמכונה i מייצרת את המוצר j . אז כל ההוצאות הן:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

האילוצים הם:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=8, \quad i\in 1:m \qquad (2)$$

(כל מכונה עובדת 8 שעות ביום)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \ge b_j \quad j\in 1:n \qquad (3)$$

(ייצור יומי של המוצר j לא פחות מהביקוש)

$$x_{ij}\ge 0 \qquad (4)$$

זאת הבעיה של מינימיזציה של פונקציה (1) באילוצים (2)-(4).

ב. נסמן ב- u_i את המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ i מ-(2) ונסמן ב- v_j את המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ j מ-(3).

הבעיה הדואלית:

$$\max\,(8\sum_{i=1}^{m}u_i + \sum_{j=1}^{n} b_jv_j)$$

$$u_i+v_ja_{ij}\le c_{ij} \quad i\in 1:m,\ j\in 1:n$$

$$v_j\ge 0.$$

7. נתונה קבוצה $A \subset E^n$. נגדיר קבוצה פולרית של קבוצה A :
$A^0 = \{x \in E^n : (x,a) \le 1 \ \forall a \in A\}$.
הוכח שקבוצה A^0 היא קבוצה קמורה.

ההוכחה:

הקבוצה $A^a = \{x \in E^n : (x,a) \le 1\}$ היא חצי-מרחב דהיינו הקבוצה קמורה. הקבוצה A^0 היא גם קבוצה קמורה כחיתוך כל הקבוצות הקמורות A^a.

8. נתונה רשת ובה שני קדקודים: מקור ויעד. לכל צלע הרשת ידוע אורך הצלע. כתוב את הבעיה של תכנון ליניארי שמאפשרת למצוא המסלול הכי קצר בין המקור לבין היעד. האם הבעיה היא מקרה פרטי של בעיית הטרנספורטציה ברשת?

הפתרון:

נבנה את בעיית טרנספורטציה באותה רשת. נניח שייצור במקור הוא 1 וביקוש ביעד הוא 1. בכל הקדקודים האחרים ייצור ו ביקוש הם אפסים. נניח שמחיר ההובלה של יחידה אחת בצלע שווה לאורך הצלע . אז ההובלה הכי זולה של יחידה אחת ממקור ליעד מתבצעת דרך המסלול הכי קצר בין המקור ליעד. זאת אומרת הבעיה של חיפוש המסלול הכי קצר יש מקרה פרטי של בעיית הטרנספורטציה ברשת.