מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות - תרגיל 10

1. יהי f איזומורפיזם בין מבנים M ו- N לשפה L.

   תהא s השמה ל- M. הוכח :

   (א) אם t שם עצם ב- L ו- s מוגדרת על כל המשתנים האישיים ב- t אז $f(Val_M(t,s)) = Val_N(t, f \circ s)$

   (ב) אם φ נוסחא ב- L ו- s מוגדרת על כל המשתנים האישיים ב- φ אז $Val_M(\varphi, s) = Val_N(\varphi, f \circ s)$

2. תהי A קבוצה לא ריקה ויהי $M = \langle \{f \mid$ פונקציה $f : A \to A, \circ \rangle\}$. הוכח ש- :

   (א) Id_A גדירה ב M.

   (ב) קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות ועל היא גדירה.

   הדרכה:

   להסתמך על המשפט: פונקציה f היא חד-חד ערכית אם ורק אם קיימת לה פונקציה הפוכה.

3. נגדיר את פונקצית השארית $r : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

   אם $m \neq 0$ אז $r(n,m)$ יהיה השארית בחלוקה של n ב- m,

   ואם $m = 0$ אז $r(n,m) = 0$.

   הוכח שבמבנה $< \mathbb{N}, r >$ האיברים , הפונקציות והיחסים הבאים גדירים :

   (א) 0

   (ב) 1

   (ג) היחס $<$

   (ד) הפונקציה $+$.

(ה) יחס החלוקה Div

($m\ Div\ n$ אםם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $n = mk$)

(ו) כפל של מספרים זרים

(שני מספרים נקראים זרים אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1)

(ז) $(*)$ הפונקציה x^2 (ריבוע).

<u>הדרכה</u>: התבונן במכפלה של שני המספרים הזרים x ו- $x+1$.

(ח) $(*)$ הפונקציה $\bullet$ (כפל) .

<u>הדרכה</u>: אם $a < b$ אז $b = a + x$. חשב את $a \cdot b$ ו- b^2.

4.

(א) הוכח כי $Id_{\mathbb{N}}$ הינו אוטומורפיזם היחיד של המבנה $< \mathbb{N}, + >$.

(ב) הוכח כי האוטומורפיזמים היחידים של המבנה $< \mathbb{Z}, \leq >$ הינם הזזות $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ל- $a \in \mathbb{Z}$, כאשר $f_a(z) = z + a$.

(ג) $(*)$ מצא את כל האוטומורפיזמים של המבנה $< \mathbb{N}, \cdot >$

<u>הדרכה</u>: תשתמש בעובדה שכל מספר טבעי גדול מ- 0 אפשר לפרק לגורמים של חזקות מספרים ראשונים.

5. הוכח בהסתמך למשל על שאלה 4 כי:

(א) 0 אינו גדיר במבנה $< \mathbb{Z}, \leq >$.

(ב) פונקצית החיבור $+$ אינה גדירה במבנה $< \mathbb{N}, \cdot >$.