

מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות

תרגיל 2.

1. חשבו את המכפלות הקרטזיות הבאות:

- א. $\{0,1,2\} \times \{0,1\}$
ב. $\emptyset \times \mathbb{N}$
ג. $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$
ד. $P(\{1,2\}) \times \{1,2\}$

2. הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית מפורשת) כל אחת מהטענות הבאות:

לכל ארבע קבוצות A, B, C, D מתקיים:

- א. $(A \cup B) \times C = (A \cup B) \times (B \cup C)$
ב. $A \times B = B \times A$
ג. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
ד. $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$
ה. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
ו. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

3. לגבי כל אחד מהיחסים הבאים קבע אילו מבין התכונות – רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות – מתקיימות בו:

- א. $\{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ וגם } a + b = 5 \}$
ב. $\{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ וגם } a - b \text{ מספר זוגי} \}$
ג. $\{ \langle n, m \rangle \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ וגם } n < m \}$
ד. $\{ \langle n, m \rangle \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ וגם } n \leq m \}$

4. ליחסים כלשהם S ו R נגדיר את "הרכבת R על S " להיות היחס הבא:

$$R \circ S = \{ \langle a, c \rangle \mid \langle b, c \rangle \in R \text{ וגם } \langle a, b \rangle \in S \}$$

- א. יהא $R = \{ \langle n, m \rangle \mid n < m \text{ וגם } n, m \in \mathbb{N} \}$ מהו $R \circ R$?
ב. יהא $S = \{ \langle n, m \rangle \mid n \leq m \text{ וגם } n, m \in \mathbb{N} \}$ מהם $S \circ S$ ו $R \circ S$?

5. הוכיחו כי פעולת ההרכבה היא אסוציאטיבית. כלומר, הוכיחו כי לכל שלושה יחסים

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T \text{ מתקיים } R, S, T$$