__מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות__

__תרגיל 3__

1. תהי A={1,2,3}.

(א) בדוק איזה מבין היחסים הבאים על A הוא יחס שקילות:

a. $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

b. $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

c. $R\cap S$

d. $R\cup S$

e. $R\circ S$

f. $S\circ R$

(ב) לכל אחד מיחסי השקילות שמצאת בסעיף א' רשום את החלוקה המתאימה של A.

(ג) רשום את כל יחסי השקילות על A בהם המספרים 1 ו-2 אינם שייכים לאותה מחלקת שקילות.

2. בדוק איזה מבין היחסים הבאים E על$\mathbb{N}\setminus\{0\}$ הוא יחס שקילות.

לכל אחד מהם, שהוא יחס שקילות, מצא את מחלקת השקילות של המספר 20.

(א) לכל $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $a\mathrm{E}b$ אם $2|(a+b)$.

(ב) לכל $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $a\mathrm{E}b$ אם $3|(a+b)$.

(ג) לכל $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $a\mathrm{E}b$ אם ל-a ול-b יש אותם מחלקים ראשוניים.

(ד) לכל $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $a\mathrm{E}b$ אם $a|b$ או $b|a$.

(ה) לכל $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $a\mathrm{E}b$ אם קיים $n\in N$ כך ש $10^n\le a,b<10^{n+1}$

__סימון__: $x|y$ פירושו x מחלק את y.

3. נגדיר יחס E על $P(\mathbb{N})$ באופן הבא:

לכל $X,Y\subseteq\mathbb{N}$: XEY אם $X\Delta Y$ היא קבוצה סופית

(א) הוכח ש-E יחס שקילות על $P(\mathbb{N})$.

(ב) מהי מחלקת השקילות של ϕ ? של $\mathbb{N}$?

(ג) הוכח של-E יש אינסוף מחלקות שקילות.

(ד) האם גם היחס הבא: XSY אם $X\Delta Y$ היא קבוצה אינסופית, הוא יחס שקילות על $P(\mathbb{N})$?

4. תהי $Q=\{\langle a,b\rangle \mid b\neq 0$ ו a,b שלמים$\}$. נגדיר על Q יחס E באופן הבא:

לכל $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in Q$: $\langle a,b\rangle E\langle c,d\rangle$ אם $a\cdot d=b\cdot c$.

הוכח ש-E יחס שקילות על Q ותאר את מחלקות השקילות שלו.

5. (*) יהיו E_1 ו E_2 יחסי שקילות על קבוצה A.

(א) הוכח שגם $E_1\cap E_2$ הוא יחס שקילות על A.

(ב) תן דוגמא נגדית שתראה ש $E_1\cup E_2$ אינו בהכרח יחס שקילות על A.

(ג) הוכח $E_1\cup E_2$ הוא יחס שקילות על A אם ורק אם לכל $a\in A$ מתקיים:

$a/E_1\subseteq a/E_2$ או $a/E_2\subseteq a/E_1$.

(ד) הוכח ש $E_1\subseteq E_2$ אם ורק אם A/E_1 הוא עידון של A/E_2.

__הגדרה__: תהיינה P_1,P_2 שתי חלוקות של קבוצה A. נאמר ש-P_1 היא עידון של P_2 אם לכל $X\in P_1$ קיימת $Y\in P_2$ כך ש $X\subseteq Y$.

בהצלחה !