מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות - תרגיל 4

1. בדוק אם היחסים הבאים הם יחסי סדר חלקיים , קוויים , בדוק האם ישנם איברים מינימליים , מקסימליים , מינימום , מקסימום :

   (א) ליחס $\subseteq$ על $P(\mathbb{N})$.

   (ב) ליחס $\subseteq$ על $P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$

2. לכל אחד מהיחסים הבאים הוכח שהוא יחס סדר חלקי על הקבוצה הנתונה ,בדוק אם הוא יחס סדר קווי, מצא את קבוצת האיברים המינימליים , ואת קבוצת האיברים המקסימליים , מצא מינימום ומקסימום (או הוכח שאין כאלה):

   (א) היחס $R = \{\langle a,b\rangle | a \geq b;\ a,b \in \mathbb{N}\}$ על $\mathbb{N}$.

   (ב) היחס $R = \{\langle a,b\rangle | b$ מחלק $a;\ a,b \in \mathbb{N}\}$ על $\mathbb{N}$.

   (ג) היחס $R = \{\langle a,b\rangle | b$ מחלק $a;\ a,b \in \mathbb{N}\}$ על $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

   (ד) היחס

   $R = \{\langle A,B\rangle \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) | A = \{m \in B : m < n\}$ כך ש- , טבעי n או שקיים $A = B\}$ על $P(\mathbb{N})$.

3. לכל אחת מהתכונות הבאות , מצא יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}$ המקיים תכונה זו:

   (א) קיימים בסדר מינימום ומקסימום

   (ב) כל איבר הוא גם איבר מינימלי וגם איבר מקסימלי .

   (ג) יש איבר מינימלי יחיד ואיבר זה אינו מינימום .

4. יהי R יחס סדר חלקי על קבוצה A ו- S יחס סדר חלקי על קבוצה B. נגדיר יחס T על $A \times B$ באופן הבא. לכל $\langle a_1,b_1\rangle, \langle a_2,b_2\rangle \in A \times B$: $\langle a_1,b_1\rangle T \langle a_2,b_2\rangle$ אם $(a_1 \neq a_2$ ו- $a_1 R a_2)$ או $(a_1 = a_2$ ו- $b_1 S b_2)$.

   (א) הוכח ש- T הוא יחס סדר חלקי .

   (ב) הוכח שאם R ו- S יחסי סדר קוויים אז T גם יחס סדר קווי.

5. יהי R יחס על קבוצה A שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי. נגדיר יחס E על A באופן הבא. לכל $a,b \in A$: aEb אם aRb וגם bRa.

(א) הוכח ש- E יחס שקלות.

(ב) נגדיר על A/E יחס $\leq$ באופן הבא. לכל שתי מחלקות שקלות $X,Y \in A/E$: $X \leq Y$ אם קיימים $a \in X$ ו- $b \in Y$ כך ש- aRb. הוכח ש- $\leq$ הוא יחס סדר חלקי על A/E.