לוגיקה ותורת הקבוצות
תרגיל 5.

1. הוכיחו באינדוקציה רגילה :

א. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0+1+2+...+n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $1+2+...+2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^n = 2^{n+1}-1$

ג. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0^3+1^3+...+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = (0+1+...+n)^2$

ד. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $3(2^0+2^2+2^4+...+2^{2n}) = 3\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = 2^{2(n+1)}-1$

2. הוכח כי לכל n קבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$ ($0 < n \in \mathbb{N}$) מתקיים :
$A_1 \Delta A_2 \Delta ... \Delta A_n = \{x | A_1,...,A_n$ שייך למספר אי זוגי מבין הקבוצות $x\}$

לדוגמא: $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta A_4$ אם"ם x שייך לבדיוק אחת או שלוש מבין הקבוצות A_1, A_2, A_3, A_4.

3. ברשותכם 3^n מטבעות זהב ($0 < n \in \mathbb{N}$) במשקל 10 גרם כל אחת ומאזני כפות.

א. נודע לכם שיתכן שאחת מהמטבעות מזויפת ומשקלה הוא רק 8 גרם. הוכיחו כי ע"י n שקילות לכל היותר ניתן לדעת אם אכן אחת המטבעות מזויפת, ואם כן, למצוא אותה.

ב. נודע לכם שיתכן שאחת מהמטבעות מזויפת ומשקלה שונה מ 10 גרם אך אינו ידוע. הוכיחו כי ע"י $2n$ שקילות לכל היותר ניתן לדעת אם אכן אחת המטבעות מזויפת, ואם כן, למצוא אותה.

הערה: במאזניים ניתן להשוות משקלים בין המטבעות אך לא ניתן למדוד את משקלם. כמו-כן, המקום על כפות המאזניים הוא בלתי מוגבל.

4. n גרגרנים ($0 < n \in \mathbb{N}$) רוצים לחלק ביניהם עוגה גדולה. הוכיחו כי קיימת אסטרטגיה לחלוקת העוגה כך שכל אחד מהם יהיה בטוח שקיבל לפחות $\frac{1}{n}$ מהעוגה.

רמז: אין צורך למצוא אסטרטגיה אלא רק להוכיח שקיימת אסטרטגיה.

5. **הגדרה:** מילה בינארית באורך n היא סדרה של n איברים שכל אחד מהם הוא 0 או 1.
תהי A קבוצת כל המילים הבינאריות מאורך n. הוכיחו כי ניתן לסדר את אברי A במעגל כך שכל שתי מילים סמוכות יהיו נבדלות במקום אחד בלבד.

דוגמא: עבור $n=3$

```
      000
   010   001
110         011
   100   111
      111
```

6. הוכיחו (ע"י אינדוקציה שלמה) כי לכל $6 < n \in \mathbb{N}$ קיימים $k, t \in \mathbb{N}$ כך ש $n = 3k + 4t$.