

מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות - תרגיל 9

1. לכל זוג מהפסוקים הבאים בדוק אם אחד מהם גורר לוגית את השני. אם כן, הוכח זאת באופן פורמלי (ע"י שימוש בהגדרת הפונקציה val). אם לא, מצא דוגמה למבנה שבו אחד מהם נכון והשני לא והוכח זאת.

$$\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow S(x, y)) \quad (\alpha)$$

$$\forall x (\exists y R(x, y) \rightarrow \exists y S(x, y)) \quad (\beta)$$

$$\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y S(x, y) \quad (\gamma)$$

2. תהינה ψ ו- φ נוסחאות ו- x משתנה שאינו חופשי ב- ψ .

(א) הוכח שלכל מבנה M (המתאים לשפה של ψ) ולכל שתי השמות s, s' כך ש-

$$Val_M(\psi, s) = Val_M(\psi, s') : x \text{ השונה } y \text{ משתנה } s(y) = s'(y)$$

(ב) הוכח באופן פורמלי :

$$\exists x (\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \psi \rightarrow \exists x \varphi$$

3. לכל זוג מהפסוקים הבאים קבע (ללא הוכחה פורמלית) אם אחד מהם גורר לוגית את השני. אם לא, מצא מבנה שבו אחד נכון והשני לא (ללא הוכחה פורמלית).

$$\varphi_1 = \forall x \exists y R(F(x), y) \quad (\alpha)$$

$$\varphi_2 = \forall x \exists y R(x, F(y)) \quad (\beta)$$

$$\varphi_3 = \forall x \exists y R(F(x), F(y)) \quad (\gamma)$$

$$\varphi_4 = \forall x \exists y (R(F(x), y) \vee R(x, F(y))) \quad (\delta)$$

$$\varphi_5 = \exists y \forall x R(x, F(y)) \quad (\epsilon)$$

$$\varphi_6 = \forall x \forall y R(x, y) \quad (\zeta)$$

4. תהי L שפה הכוללת סימן יחס דו-מקומי R . לגבי כל זוג מהמבנים הבאים בשפה L מצא פסוק שנכון באחד מהם אך לא בשני (ללא הוכחה פורמלית).

$$M_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle \quad (\text{א})$$

$$M_2 = \langle \mathbb{N}, Div \rangle \quad (\text{ב})$$

$$M_3 = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle \quad (\text{ג})$$

$$M_4 = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_1 \rangle \quad (\text{ד})$$

כאשר Div הוא יחס החלוקה:

$$Div = \{ \langle a, b \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b \text{ מחלק את } a \}$$

$$\leq_1 \text{ הוא יחס הסדר הלקסיקוגרפי על } \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

כלומר עבור $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ מתקיים $\langle a, c \rangle \leq_1 \langle b, d \rangle$ אם $a < b$ או

אם $(a = b \text{ וגם } c \leq d)$.