מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות - תרגיל 9

1. לכל זוג מהפסוקים הבאים בדוק אם אחד מהם גורר לוגית את השני. אם כן , הוכח זאת באופן פורמלי (ע"י שימוש בהגדרת הפונקציה val). אם לא, מצא דוגמה למבנה שבו אחד מהם נכון והשני לא והוכח זאת.

   (א) $\forall x\exists y(R(x,y)\to S(x,y))$

   (ב) $\forall x(\exists yR(x,y)\to \exists yS(x,y))$

   (ג) $\forall x\exists yR(x,y)\to \forall x\exists yS(x,y)$

2. תהינה ψ ו- φ נוסחאות ו- x משתנה שאינו חופשי ב- ψ.

   (א) הוכח שלכל מבנה M (המתאים לשפה של ψ) ולכל שתי השמות $s,s^{'}$ כך ש- $s(y)=s^{'}(y)$ לכל משתנה y השונה מ- x : $Val_M(\psi,s)=Val_M(\psi,s^{'})$.

   (ב) הוכח באופן פורמלי :

   $$\exists x(\psi\to\varphi)\Leftrightarrow \psi\to\exists x\varphi$$

3. לכל זוג מהפסוקים הבאים קבע (ללא הוכחה פורמלית) אם אחד מהם גורר לוגית את השני . אם לא , מצא מבנה שבו אחד נכון והשני לא (ללא הוכחה פורמלית).

   (א) $\varphi_1=\forall x\exists yR(F(x),y)$

   (ב) $\varphi_2=\forall x\exists yR(x,F(y))$

   (ג) $\varphi_3=\forall x\exists yR(F(x),F(y))$

   (ד) $\varphi_4=\forall x\exists y(R(F(x),y)\vee R(x,F(y)))$

   (ה) $\varphi_5=\exists y\forall xR(x,F(y))$

   (ו) $\varphi_6=\forall x\forall yR(x,y)$

4. תהי L שפה הכוללת סימן יחס דו-מקומי R. לגבי כל זוג מהמבנים הבאים בשפה L מצא פסוק שנכון באחד מהם אך לא בשני (ללא הוכחה פורמלית) .

(א) $M_1 =< \mathbb{N}, \leq >$

(ב) $M_2 =< \mathbb{N}, Div >$

(ג) $M_3 =< P(\mathbb{N}), \subseteq >$

(ד) $M_4 =< \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_1 >$

כאשר Div הוא יחס החלוקה:

$$Div = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{מחלק את } a \text{ } b\}$$

$\leq_1$ הוא יחס הסדר הלקסיקוגרפי על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

כלומר עבור $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ מתקיים $< a, c >\leq_1< b, d >$ אם $a < b$ או אם ($a = b$ וגם $c \leq d$).