

# תרגיל בית 1

יש להגיש פתרונות ללפחות 2 בעיות, כאשר פתרון כולל תשובה ונימוק לכל סעיף (לא חובה להגיש את הסעיפים עם כוכבית).

## בעיה 1.

מספרי טלפון במדינה מסויימת הם סדרות בעלות 6 ספרות: 111222, 000000 וכו' (כולל 999999). כל מספרי הטלפון האפשריים נמצאים בשימוש.

- כמה מספרי טלפון יש במדינה זו?
- כמה מספרי טלפון בהם כל הספרות הן אי-זוגיות?
- כמה מספרי טלפון בהם הספרה 2 מופיעה בהתחלה לפחות פעמיים (כמו 223458)?
- מה מספרי טלפון בהם כל שתי ספרות שכנות הן שונות?
- כמה מספרי טלפון בהם כל הספרות שונות?
- כמה מספרי טלפון בהם קיימת לפחות ספרה זוגית אחת?
- הנחיה: חשבו קודם את המשלים לקבוצה ז. כיצד הוא מתואר? כמה איברים הוא מכיל?
- כמה מספרי טלפון בהם מופיעה הספרה 7 לפחות פעם אחת?
- הנחיה: חשבו קודם את המשלים לקבוצה ז. כיצד הוא מתואר? כמה איברים הוא מכיל?
- \*. כמה מספרי טלפון בהם הספרה 3 מופיעה בדיוק 3 פעמים?

## בעיה 2.

מבחן במתמטיקה צריך להכיל שתי בעיות באלגברה (שונות, כמובן), שלוש בעיות בגיאומטריה (שונות) ובעיה בקומבינטוריקה. למורה יש מאגר בעיות, המכיל 40 בעיות באלגברה, 25 בעיות בגיאומטריה ו- 50 בעיות בקומבינטוריקה. כמה מבחנים שונים יכול המורה להרכיב?

## בעיה 3.

- כמה העתקות מהקבוצה  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  לקבוצה  $\{1, 2, 3, 4\}$  קיימות?
  - כמה מהן חד-חד-ערכיות?
  - \*. כמה מהן על?
- נתבונן בהעתקות מהקבוצה  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  לעצמה.
  - כמה העתקות כאלו קיימות?
  - כמה מהן חד-חד-ערכיות?
  - כמה מהן חד-חד-ערכיות ועל?
  - כמה מהן בעלות תמונה בת איבר אחד בלבד?
  - כמה מהן בעלות תמונה המהווה תת-קבוצה של  $\{1, 2, 3, 4\}$ ?

## בעיה 4.

על מעגל מסומנות 100 נקודות שחורות ונקודה אחת אדומה. אנו מתבוננים במצולעים שקודקודיהם הם נקודות מסומנות. הראו כי מספר המשולשים שכל קודקודיהם הם שחורים שווה למספר המרובעים הקמורים בעלי קודקוד אדום (ושלושה קודקודים שחורים).

הנחיה: יש לבנות העתקה חח"ע ועל בין שתי הקבוצות.

הנחיה: בבעיות הבאות מומלץ לצייר דיאגרמת Venn.

### בעיה 5.

נתבונן בתת־קבוצות של הקבוצה  $X = \{1 \leq n \leq 10^5, n \in \mathbb{Z}\}$ . תהי  $A$  אוסף כל המספרים ב- $X$  המתחלקים ב-2,  $B$  אוסף כל המספרים ב- $X$  המתחלקים ב-3,  $C$  אוסף כל המספרים ב- $X$  המתחלקים ב-4, ו- $D$  אוסף כל המספרים ב- $X$  המתחלקים ב-5. חשבו את הגדלים של הקבוצות הבאות:

$$1. A, B, C, D, A^c, B^c, C^c, D^c$$

$$2. C \cup D, A \cup D, A \cup C, B \cup C, A \cup B, C \cap D, D \cap A, C \cap A, B \cap C, A \cap B$$

$$3. A \cup B \setminus C, D \setminus (A \setminus C), A \cup B \setminus C, A \setminus C, A \setminus B, B \Delta C, A \Delta B$$

$$4. A \cap B \cap C \cap D, A \cap B \cap D, A \cap B \cap C$$

$$5. A \cup B \cup C \cup D, B \cup C \cup D, A \cup B \cup D, A \cup B \cup C$$

### בעיה 6.

השתמשו בכלל הכלה והדחה כדי להראות כי המספרים הראשוניים מהווים פחות מ-25 אחוזים מכלל המספרים מ-1 עד  $10^5$ .

הנחיה: חישבו את כמות המספרים מ-1 עד  $N$  (עבור  $N$  גדול מאוד, כמו  $10^5$ ) שאינם מתחלקים בכל המספרים מ-2 עד 10. המספרים הראשוניים (מלבד 2, 3, 5, 7) יהיו תת־קבוצה של קבוצה זו.

הערה: זהו חסם גס מאוד. בפועל, כמות המספרים הראשוניים בין 1 ל- $N$  היא בערך  $N/\ln(N)$  ("משפט הצפיפות של מספרים ראשוניים") ולכן עבור  $N = 10^5$ , המספרים הראשוניים מהווים כ-9.5 אחוזים מכלל המספרים מ-1 עד  $10^5$ .

### בעיה 7.

א. כמה מספרים בעלי 6 ספרות (כלומר, בין  $10^5$  לבין 999999) מכילים את הספרה 9 ?

ב. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרה 9 וגם את הספרה 7?

הנחיה: קודם כל, חישבו כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים לפחות את אחת מהספרות 7, 9.

ג. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרה 9 אך אינם מכילים את הספרה 7?

האם זה יותר מחצי מכל המספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרה 9? האם זה יותר מ-2/3? יותר מ-90 אחוזים?

ד. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרה 0?

שימו לב, זו אינה יכולה להיות הספרה הראשונה משמאל!

ה. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרה 9 אך אינם מכילים את הספרה 0?

ו. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרה 9 וגם את הספרה 0?

ז. מה יותר גדול:

- כמות המספרים בעלי 6 ספרות אשר מכילים את הספרה 9 ואינם מכילים את הספרה 0

או

- כמות המספרים בעלי 6 ספרות אשר מכילים את הספרה 9 אך אינם מכילים את הספרה 7?

ח. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרות 9, 7, 0?

ט. כמה מספרים בעלי 6 ספרות מכילים את הספרות 9, 7, אך לא את 0?