

תרגיל בית 2

בעיה 1.

- א. מהו מקדם המונום abc בפולינום $(a+b+c)^3$?
ב. מהו מקדם המונום ab^2 בפולינום $(a+b)^3$?
ג. מהו מקדם המונום $(ab)^2$ בפולינום $(a+b)^4$?
ד. מהו מקדם המונום $a_1^2 a_2^2 a_3 a_4 a_5 a_6$ בפולינום $(a_1 + a_2 + \dots + a_6)^8$?
ה. השתמשו בסעיפים הקודמים כדי לחשב מהי כמות המילים השונות אשר ניתן לקבל ע"י פרמוטציה (שינוי סדר) של האותיות במילים הבאות:

- אבא

- כלב

- גלגל

- מתמטיקאי

- ו. מהי כמות המילים השונות אשר ניתן לקבל ע"י פרמוטציה (שינוי סדר) של האותיות במילה Massachusetts?

בעיה 2.

- נתבונן בסדרות באורך 28 עם איברים 0, 1.
א. לכל k בין 1 ל-28 חישבו את מספר הסדרות המכילות k אחדות בדיוק.
ב. הראו כי מספר הסדרות בהן 1 מופיע מספר זוגי של פעמים הוא מספר זוגי.
ג. איזה מהמספרים הבאים גדול יותר:
- מספר הסדרות בהן 1 מופיע מספר זוגי של פעמים,
- מספר הסדרות בהן 1 מופיע מספר אי-זוגי של פעמים.
הנחיה: הגדירו התאמה חח"ע ועל בין הקבוצות המתאימות.
ג. הראו כי סעיף ב' שקול לחישוב של סכום המקדמים הבינומיים עם סימנים מתחלפים:

$$\binom{28}{0} - \binom{28}{1} + \binom{28}{2} - \dots + \binom{28}{28}$$

מהו הערך של סכום זה?

- הנחיה: השתמשו במשפט ניוטון עבור הערכים $a = 1, b = -1$.
ד. הראו כי מספר התת-קבוצות של הקבוצה $\{1 \leq n \leq 28\}$ בעלות עוצמה זוגית שווה למספר התת-קבוצות בעלות עוצמה אי-זוגית.

בעיה 3.

- בכיתה יש 30 תלמידים.
א. הכיתה בוחרת וועד תלמידים, אשר מורכב משני אנשים: יו"ר ומזכיר. מהו מספר הדרכים לבחור וועד בכיתה זו?
ב. כל שבוע המורה בחורת זוג תורנים (תפקידי התורנים בזוג זהים). בכמה דרכים שונות היא יכולה לעשות זאת?
ג. המורה החליטה שאף זוג תורנים לא יחזור על עצמו במהלך הלימודים (למשל, אם בני ושרה היו פעם תורנים באותו שבוע, המורה אינה רוצה שהם יהיו שוב תורנים ביחד, אבל בני יכול להיות בתורנות עם כל תלמיד אחר). בהנחה שהתלמידים לומדים 40 שבועות בשנה, האם המורה תוכל ליישם את החלטתה במשך שנה? במשך כיתות א'-ו'? במשך כל 12 שנות לימוד?

בעיה 4.

- כמה מספרים בעלי 6 ספרות יש, שכל ספרותיהן שונות ומסודרות בסדר יורד?
הנחיה: יש לבנות העתקה מקבוצת כל המספרים בעלי 6 ספרות שונות לקבוצה הרצויה, ולחקור את התמונות ההפוכות של כל איבר.

בעיה 5. הנחייה: לפתרון בעיה זו השתמשו בעקרון שובך היונים.
 א. בכיתה לומדים 900 תלמידים. הוכיחו כי קיימים 3 תלמידים להם יש יום הולדת באותו תאריך.
 ב. לחגיגת יום הולדת הגיעו 12 ילדים שאכלו סה"כ 65 סוכריות. הוכיחו כי קיימים שני תלמידים שאכלו מספר שווה של סוכריות.
 ג. * הראו כי בכל קבוצה של 10 מספרים שונים בין 1 ל-100 ניתן לבחור תת-קבוצות זרות A, B לא ריקות כך שסכום המספרים בשתי קבוצות אלו יהיה זהה.
 הנחייה: קודם מומלץ לפתור את הבעיה למקרה בו הקבוצות שונות אך אינן זרות. רמז: להשתמש בעקרון שובך היונים.
 האם טענה זו תהיה נכונה עבור קבוצה של 10 מספרים שונים בין 1 ל-1000? אם כן, הוכיחו, אם לא - תנו דוגמא נגדית.

בעיה 6.
 א. נינה צובעת דיסק המחולק ל-100 גזרות (*sectors*) שוות, ב-100 צבעים (כל גזרה בצבע שונה). מהו מספר הצביעות האפשריות השונות?
 שימו לב, שתי צביעות נחשבות לזהות אם הן מתקבלות אחת מהשנייה ע"י סיבוב.
 הנחייה: חשבו כמה רצפים (שורות) של צבעים ניתן להרכיב. לאחר מכן יש לבנות התאמה (העתקה) בין קבוצת הרצפים לקבוצת הצביעות של הדיסק. כמה רצפים מתאימים לכל צביעה?

ב. נינה מרכיבה שרשרת מ-25 פנינים שונות. בכמה דרכים היא יכולה לעשות זאת?
 שימו לב, שתי שרשראות נחשבות לזהות אם הן מתקבלות אחת מהשנייה ע"י סיבוב או היפוך של השרשרת.
 ג. נינה צובעת קובייה ב-6 צבעים (אף שתי פאות לא באותו צבע). בכמה דרכים שונות היא יכולה לעשות זאת?
 שתי קוביות צבועות נחשבות לשונות אם לא ניתן לסובב אחת מהן כך שהמראה שלהן יהיה זהה.