REMARQUES

SUR UN BEAU RAPPORT ENTRE LES SÉRIES DES PUISSANCES TANT DIRECTES QUE RÉCIPROQUES.

PAR M. L. EULER *).

I.

Le rapport, que je me propoſe de développer ici, regarde les ſommes de ces deux ſéries infinies générales:

$$\odot \;.\; 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \&c.$$

$$☽ \;.\; \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \&c.$$

dont la premiere contient toutes les puiſſances poſitives ou directes des nombres naturels, d'un expoſant quelconque m, & l'autre les puiſſances négatives ou réciproques des mêmes nombres naturels, d'un expoſant auſſi quelconque n, en faiſant varier alternativement les ſignes des termes de l'une & de l'autre ſérie. Mon but principal eſt donc de faire voir, que, quoique ces deux ſéries ſoient d'une nature tout à fait différente, leurs ſommes ſe trouvent pourtant dans un très beau rapport entr'elles; de ſorte que, ſi l'on étoit en état d'aſſigner en général la ſomme de l'une de ces deux eſpeces, on en pourroit déduire la ſomme

 de

*) Lu en 1749.

de l'autre eſpece. Ou bien je ferai voir, qu'en connoiſſant la ſomme de la premiere ſérie pour un expoſant quelconque m, on en peut toujours déterminer la ſomme de l'autre ſérie pour l'expoſant $n = m + 1$. Cette remarque me paroit d'autant plus importante, qu'elle n'eſt encore fondée que ſur une induction, mais que je porterai à un tel degré de certitude, qu'on la pourra regarder comme très rigoureuſement démontrée.

2. Pour les ſéries de la premiere eſpece, puisque leurs termes deviennent de plus en plus grands, il eſt bien vrai qu'on ne ſauroit ſe former une juſte idée de leur ſomme, tandisqu'on entend par ſomme une telle valeur, de laquelle on approche d'autant plus, plus on raſſemble de termes de la ſérie actuellement. Ainſi, quand on dit que la ſomme de cette ſérie $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ &c. eſt $\frac{1}{4}$, cela doit paroitre bien paradoxe, puisqu'en raſſemblant 100 termes de cette ſérie, on trouve -50: or la ſomme de 101 termes donne $+51$, leſquelles valeurs ſont bien différentes de $\frac{1}{4}$, & le deviennent encore beaucoup plus, quand on multiplie le nombre des termes. Mais j'ai déjà remarqué dans une autre occaſion, qu'il faut donner au mot de *ſomme* une ſignification plus étendue, & entendre par là une fraction, ou autre expreſſion analytique, laquelle étant développée ſelon les principes de l'analyſe produiſe la même ſérie dont on cherche la ſomme. Après avoir établi cette ſignification, il n'eſt plus douteux que la ſomme de cette ſérie $1 - 2 + 3 - 4 +$ &c. ſoit $= \frac{1}{4}$, puiſqu'elle nait de l'évolution de cette formule $\frac{1}{(1+1)^2}$, dont la valeur eſt inconteſtablement $\frac{1}{4}$. La choſe deviendra plus claire en conſidérant cette ſérie plus générale:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \&c.$$

qui réſulte en développant cette formule $\frac{1}{(1+x)^2}$, à laquelle donc cette ſérie eſt effectivement égale, & partant auſſi dans le cas où $x = 1$.

3. On comprend aisément que le calcul différentiel nous fournit un moyen fort aisé de trouver les sommes de ces sortes de séries ; & on en tire les sommations suivantes :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \&c. = \frac{1}{1+x},$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \&c. = \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \&c. = \frac{1-x}{(1+x)^3},$$

$$1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + \&c. = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4},$$

$$1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \&c. = \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5},$$

$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \&c. = \frac{1-26x+66xx-26x^3+x^4}{(1+x)^6},$$

$$1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 \ \&c. = \frac{1-57x+302xx-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7},$$

&c.

:

d'où l'on tire pour les séries de notre premiere espece, en prenant $x = 1$, les sommes suivantes :

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + 5^0 - 6^0 + \&c. = \tfrac{1}{2}$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. = \tfrac{1}{4}$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. = 0$$
$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. = -\tfrac{2}{16}$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0$$
$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c. = +\tfrac{16}{64}$$
$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c. = 0$$
$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c. = -\tfrac{272}{256}$$
$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c. = 0$$
$$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c. = +\tfrac{7936}{1024}. \ \&c.$$

4. Des séries de l'autre espece ⅁ on n'a connu autrefois que celle du cas $n = 1$, ou de celle-ci

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \&c.$$

dont la somme est $l2$, jusques à ce que j'ai trouvé la somme de la série réciproque des quarrés, & ensuite de toutes les autres puissances paires: ayant demontré que les sommes de toutes ces séries dépendent du rapport de la circonférence d'un cercle π à son diametre 1.

Car supposant les sommes de ces séries	j'ai trouvé
$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = A\pi^2$	$A = \frac{1}{6}$,
$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = B\pi^4$	$B = \frac{2}{5}A^2$,
$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = C\pi^6$	$C = \frac{4}{7}AB$,
$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = D\pi^8$	$D = \frac{4}{9}AC + \frac{2}{9}B^2$,
$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = E\pi^{10}$	$E = \frac{4}{11}AD + \frac{4}{11}BC$,
&c.	&c.

d'où je conclus pour les séries de notre seconde espece, en faisant varier alternativement les signes

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \&c. = \frac{2-1}{2^1}A\pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \&c. = \frac{2^3-1}{2^3}B\pi^4$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \&c. = \frac{2^5-1}{2^5}C\pi^6$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \&c. = \frac{2^7 - 1}{2^7} D\pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \&c. = \frac{2^9 - 1}{2^9} E\pi^{10}$$

$$1 - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} - \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} - \frac{1}{6^{12}} + \&c. = \frac{2^{11} - 1}{2^{11}} F\pi^{12},$$

&c.

Or, pour les cas où n eſt un nombre impair, toutes mes recherches pour en trouver les ſommes, ont été inutiles juſques ici. Cependant il eſt certain qu'elles ne dépendent point d'une maniere ſemblable des puiſſances pareilles du nombre π. Peut-être que les réflexions ſuivantes y répandront quelque jour.

5. Puisque les nombres A, B, C, D, &c. ſont de la derniere importance dans ce ſujet, je les mettrai ici auſſi loin, que je les ai calculés.

$$A = \frac{2^0 . 1}{1.2.3},$$

$$B = \frac{2^2 . 1}{1.2 \ldots 5.3},$$

$$C = \frac{2^4 . 1}{1.2 \ldots 7.3},$$

$$D = \frac{2^6 . 3}{1.2 \ldots 9.5},$$

$$E = \frac{2^8 . 5}{1.2 \ldots 11.3},$$

$$F = \frac{2^{10} . 691}{1.2 \ldots 13.105},$$

$$G = \frac{2^{12} . 35}{1.2 \ldots 15.1},$$

H =

$$H = \frac{2^{14} \cdot 3617}{1 \cdot 2 \ldots 17 \cdot 15},$$

$$I = \frac{2^{16} \cdot 43867}{1 \cdot 2 \ldots 19 \cdot 21},$$

$$K = \frac{2^{18} \cdot 1222277}{1 \cdot 2 \ldots 21 \cdot 55},$$

$$L = \frac{2^{20} \cdot 854513}{1 \cdot 2 \ldots 23 \cdot 3},$$

$$M = \frac{2^{22} \cdot 1181820455}{1 \cdot 2 \ldots 25 \cdot 273},$$

$$N = \frac{2^{24} \cdot 76977927}{1 \cdot 2 \ldots 27 \cdot 1},$$

$$O = \frac{2^{26} \cdot 23749461029}{1 \cdot 2 \ldots 29 \cdot 15},$$

$$P = \frac{2^{28} \cdot 8615841276005}{1 \cdot 2 \ldots 31 \cdot 231},$$

$$Q = \frac{2^{30} \cdot 84802531453387}{1 \cdot 2 \ldots 33 \cdot 85},$$

$$R = \frac{2^{32} \cdot 90219075042845}{1 \cdot 2 \ldots 35 \cdot 3}.$$

6. Or c'eſt auſſi de ces mêmes nombres A, B, C, D, &c. que dépend la ſommation des ſéries de la premiere eſpece ⊙ dans les cas, où l'expoſant m eſt un nombre impair, ayant déja vu que, lorsque cet expoſant eſt un nombre pair, la ſomme devient égale à zéro. Mais il faut employer une méthode toute particuliere pour démontrer cette harmonie. Pour cet effet, il faut recourir à la méthode générale que j'ai donnée autrefois pour déterminer les ſommes des

ſéries

ſéries par leurs termes généraux. Soit donc X une fonction quelconque de x, repréſentée en ſorte $X = f : x$, & conſidérons cette ſérie continuée à l'infini

$$f : x + f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \&c.$$

dont les termes ſuivans ſoyent de ſemblables fonctions de $x + \alpha$, $x + 2\alpha$, $x + 3\alpha$, &c. & poſons la ſomme de cette ſérie $= S$, qui étant auſſi une fonction de x, ſi l'on y met $x + \alpha$ au lieu de x, d'où elle devient

$$S + \frac{\alpha dS}{1 dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1.2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1.2.3.4 dx^4} \ \&c.$$

cette expreſſion ſera la ſomme de la ſérie

$$f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \&c.$$

& partant égale à $S - f : x = S - X$, de ſorte que

$$-X = \frac{\alpha dS}{1 dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1.2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

Or de cette équation on trouve par la méthode que j'ai expoſée ailleurs

$$S = -\frac{1}{\alpha}\int X dx + \tfrac{1}{2}X - \frac{\alpha A dX}{2 dx} + \frac{\alpha^3 B d^3X}{2^3 dx^3} - \frac{\alpha^5 C d^5X}{2^5 dx^5} + \&c.$$

où A, B, C, &c. marquent les mêmes nombres que je viens de développer : de ſorte que par ce moyen on parvient à la ſomme cherchée S, tant par la formule intégrale $\int X dx$, que par les différentiels de tout ordre de la fonction X.

7. Maintenant, pour obtenir la variation des ſignes, au lieu de α écrivons 2α pour avoir cette ſommation :

$$f : x + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \&c. = -\frac{1}{2\alpha}\int X dx + \tfrac{1}{2}X$$
$$- \frac{\alpha A dx}{dx} + \frac{\alpha^3 B d^3X}{dx^3} - \frac{\alpha^5 C d^5X}{dx^5} + \&c.$$

du double de laquelle ôtons la série précédente, & nous aurons

$$f:x - f:(x+\alpha) + f:(x+2\alpha) - f:(x+3\alpha) + f:(x+4\alpha) - \&c.$$

$$= \tfrac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)\alpha A d X}{2\,dx} + \frac{(2^4-1)\alpha^3 B d^3 X}{2^3\,dx^3} - \frac{(2^6-1)\alpha^5 C d^5 X}{2^5\,dx^5} + \&c.$$

où le membre, qui renfermoit l'intégrale $\int X\,dx$, est disparu. Posons maintenant, pour approcher d'avantage de notre but $f: x = X = x^m$; & nous aurons la somme de la série suivante:

$$x^m - (x+\alpha)^m + (x+2\alpha)^m - (x+3\alpha)^m + (x+4\alpha)^m - \&c. =$$

$$\tfrac{1}{2}x^m - \frac{(2^2-1)m\alpha A x^{m-1}}{2} + \frac{(2^4-1)m(m-1)(m-2)\alpha^3 B x^{m-3}}{2^3}$$

$$- \frac{(2^6-1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\,\alpha^5 C x^{m-5}}{2^5}$$

$$+ \frac{(2^8-1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)\alpha^7 D x^{m-7}}{2^7},$$

&c.

qui ne renfermera qu'un nombre déterminé de termes, toutes les fois que l'exposant m est un nombre entier positif. Donc, posant $\alpha = 1$, nous aurons pour nos séries de la premiere espece ⊙.

$$x^m - (x+1)^m + (x+2)^m - (x+3)^m + (x+4)^m - (x+5)^m + \&c. =$$

$$\tfrac{1}{2}x^m - \frac{m}{2}(2^2-1)A x^{m-1} + \frac{m}{2.}\frac{(m-1)}{2.}\frac{(m-2)}{2}(2^4-1)B x^{m-3}$$

$$- \frac{m}{2.}\frac{(m-1)}{2.}\frac{(m-2)}{2.}\frac{(m-3)}{2.}\frac{(m-4)}{2}(2^6-1)\,C x^{m-5}$$

$$+ \frac{m}{2.}\frac{(m-1)}{2.}\frac{(m-2)}{2.}\frac{(m-3)}{2.}\frac{(m-4)}{2.}\frac{(m-5)}{2.}\frac{(m-6)}{2}(2^8-1)D x^{m-7}.$$

&c.

8. A préſent nous n'avons qu'à ſuppoſer $x = 1$, pour avoir en général la ſomme de toutes nos ſéries de la premiere eſpece ⊙: mais nous la trouverons encore plus aiſément en ſuppoſant $x = 0$, d'où nous tirerons la ſomme de cette ſérie

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m - 5^m + 6^m - 7^m + \&c.$$

qui n'eſt que la négative de celle que nous cherchons. Or, poſant $x = 0$, tous les nombres qui compoſent la ſomme évanouiſſent à l'exception d'un ſeul; où l'expoſant de x zéro, ce qui n'arrive que dans les cas où m eſt un nombre impair; car, quand il eſt pair, tous les membres & partant auſſi la ſomme de la ſérie ſe réduit à rien. Donc, prenant négativement ces ſommes, nous trouverons comme il ſuit.

$$\begin{array}{l|l}
m=0 & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c. = \frac{1}{2} \\
m=1 & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. = +1\frac{(2^2-1)}{2}A, \\
m=2 & 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. = 0, \\
m=3 & 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. = -1.2.3\frac{(2^4-1)}{2^3}B, \\
m=4 & 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0, \\
m=5 & 1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c. = +1.2\ldots5.\frac{(2^6-1)}{2^5}C, \\
m=6 & 1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c. = 0, \\
m=7 & 1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c. = -1.2\ldots7.\frac{(2^8-1)}{2^7}D, \\
m=8 & 1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c. = 0, \\
m=9 & 1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c. = +1.2\ldots9.\frac{(2^{10}-1)}{2^9}E, \\
m=10 & 1 - 2^{10} + 3^{10} - 4^{10} + 5^{10} - 6^{10} + \&c. = 0,
\end{array}$$

&c.

Quand on développe ces sommes, on les trouve les mêmes que celles que j'ai rapportées ci-dessus §. 3. mais à présent on voit leur liaison avec les lettres A, B, C, &c.

9. Divisons ces séries de la premiere espece ☉ chacune par celle de la seconde espece ☽, qui renferme le même nombre de la progression A, B, C, D, &c. pour en tirer les équations suivantes.

$$\frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \&c.} = + \frac{1\,(2^2 - 1)}{(2 - 1)\pi^2},$$

$$\frac{1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \&c.} = 0,$$

$$\frac{1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^5} + \&c.} = - \frac{1.2.3\,(2^4 - 1)}{(2^3 - 1)\pi^4},$$

$$\frac{1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \&c.} = 0,$$

$$\frac{1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \&c.} = + \frac{1.2\ldots5\,(2^6 - 1)}{(2^5 - 1)\pi^6},$$

$$\frac{1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \&c.} = 0,$$

$$\frac{1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \&c.} = - \frac{1.2\ldots7\,(2^8 - 1)}{(2^7 - 1)\pi^8},$$

1 —

$$\frac{1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{4^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{6^9} + \&c.} = 0,$$

$$\frac{1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \&c.} = + \frac{1.2\ldots 9(2^{10}-1)}{(2^9-1)\pi^{10}},$$

&c.

Or l'équation qui précéde celles-ci, ſera

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.} = \frac{1}{2l2},$$

dont la liaiſon avec les ſuivantes eſt entierement cachée.

10. Or la conſidération de ces équations me conduit à cette formule générale:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.} =$$

$$N. \ \frac{1.2.3\ldots(n-1)(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n},$$

où tout revient à déterminer juſtement le cöefficient N à l'égard de l'expoſant n. Pour cet effet conſidérons les valeurs de ce cöefficient N, qui répondent à chacun des expoſans n, que je viens d'examiner:

n	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	&c.
N	+1,	0,	−1,	0,	+1,	0,	−1,	0,	+1	&c.

& puiſque toutes les fois que n eſt un nombre impair, la lettre N doit évanouir, & que pour les cas $n = 4i + 2$, il faut qu'il ſoit $N = +1$, mais pour les cas $n = 4i$, il devient $N = -1$, il eſt évident qu'on ſatisfait à ces conditions en ſuppoſant N = —

$\operatorname{cos.} \frac{n\pi}{2}$. Par cette raiſon je hazarderai la *conjecture ſuivante*, que quelque ſoit l'expoſant n, cette équation ait toujours lieu:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \&c.}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \&c.} = \frac{-1.2.3\ldots(n-1)(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \operatorname{cos.} \frac{n\pi}{2}.$$

Cette conjecture paroîtra ſans doute fort hardie, mais puiſqu'elle eſt d'accord avec les cas, où n eſt un nombre entier poſitif plus grand que l'unité, je prouverai ſon accord avec la vérité premierement pour le cas $n = 1$, & enſuite $n = 0$. Après cela je ferai voir, que ſi cette conjecture eſt fondée pour les cas où n eſt un nombre poſitif, elle le ſera auſſi, quand n eſt un nombre négatif; & enfin je développerai auſſi quelques cas, où l'on donne à n une valeur rompüe.

11. Soit donc d'abord $n = 1$, pour avoir cette forme $\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.}$, dont nous ſavons que la valeur eſt $= \frac{1}{2\,l\,2}$; or notre expreſſion donne pour ce cas $1.2\ldots(n-1) = 1$, $2^n - 1 = 1$, $\pi^n = \pi$, mais les deux autres parties $\operatorname{cos.} \frac{n\pi}{2}$ & $2^{n-1} - 1$, évanouiſſent l'une & l'autre. C'eſt pourquoi je repréſente enſorte la valeur, que notre conjecture fournit pour ce cas:

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{cos.} \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} - 1},$$

où

où il s'agit de déterminer la valeur de la fraction $\frac{\text{cos.}\,\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}-1}$, dans le cas $n=1$, où le numérateur & le dénominateur évanouissent. Considérons donc la lettre n comme variable, & puisque le différentiel du numérateur est $-\frac{\pi\,dn}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$, & celui du dénominateur $= 2^{n-1}\,dn\,l\,2$, notre fraction pour ce cas sera la même que celle-cy $-\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}\,l\,2}$, qui posant $n=1$ se réduit à celle-cy $-\frac{\pi}{2\,l\,2}$, de sorte que la valeur que nous cherchons sera:

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\text{cos.}\,\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}-1}=+\frac{1}{2\,l\,2},$$

tout comme il est clair de soi-même. Notre conjecture ayant donc aussi lieu por le cas $n=1$, qui paroissoit d'abord s'écarter entierement de la loi des cas suivans, c'est déjà une preuve très forte pour la vérité de cette conjecture; & puisqu'il semble impossible qu'une fausse supposition ait pu soutenir cette épreuve, on pourroit déjà regarder notre conjecture comme très solidement établie: mais je m'en vai apporter encore d'autres preuves également convaincantes.

12. Soit à présent $n=0$, pour avoir cette forme

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\&c.}{1-1+1-1+1-1+\&c.},$$

dont la valeur est évidemment $=2\,l\,2$. Or notre conjecture, à cause de $\text{cos.}\,\frac{n\pi}{2}=1$, $2^{n-1}-1=-\frac{1}{2}$ & $\pi^n=1$, fournit pour ce cas $+\,2.\;1.\,2.\,3.\ldots(n-1)\,(2^n-1)$, dont le le facteur $1. 2. 3. \ldots (n - 1)$ étant infini, & l'autre $2^n - 1$ évanouissant, on voit déjà que notre conjecture n'est pas contredite par ce cas: mais, pour en prouver aussi le parfait accord, je remarque que puisqu'il y a généralement:

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots (n - 1) = \frac{1}{n}.\ 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n$$

& que dans le cas $n = 0$, on a $1. 2. 3. \ldots n = 1$, noũs aurons pour ce même cas $1. 2. 3. \ldots (n - 1) = \frac{1}{n}$, & partant la valeur tirée de notre conjecture sera $= \frac{2\ (2^n - 1)}{n}$, où puisque le numérateur & le dénominateur évanouissent en posant $n = 0$, on n'a qu'à substituer à leur place leurs différentiels en regardant n comme une quantité variable, pour avoir une autre fraction $\frac{2.\ 2^n\, dn\, l\, 2}{dn} =$ $2.\ 2^n l\, 2$, équivalente à celle-là pour le cas $n = 0$: or celle-cy nous donne ouvertement la même valeur $2\, l\, 2$, que la nature des séries exige. Voilà donc une nouvelle preuve, qui étant jointe à la précédente pourra bien tenir lieu d'une démonstration complette de notre conjecture. Cependant on n'est que trop autorisé d'en exiger encore une démonstration directe, qui renferme à la fois tous les cas possibles.

13. Notre conjecture étant donc juste pour tous les cas où n est un nombre entier positif, je m'en vai prouver à présent qu'elle est également d'accord avec la vérité, lorsqu'on prend pour n un nombre entier négatif quelconque. Or dans ces cas la valeur de la formule $1. 2. 3. \ldots (n - 1)$, devient infinie, ce qui semble troubler la démonstration que j'ai en vüe: mais une observation, que j'ai prouvée ailleurs levera cet obstacle. Prenant ce signe $[\lambda]$, pour marquer ce produit: $1. 2. 3. \ldots \lambda$, j'ai démontré qu'il y a toujours $\frac{[\lambda]}{[-\lambda]}$

$[-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}$: donc poſant $n - 1 = - m$ ou $n = - m + 1$, pour avoir cete expreſſion:

$$\frac{1 - 2^{-m} + 3^{-m} - 4^{-m} + 5^{-m} + 6^{-m} + \&c.}{1 - 2^{m-1} + 3^{m-1} - 4^{m-1} + 5^{m-1} - 6^{m-1} + \&c.} =$$
$$\frac{-1.2.3\ldots(-m)(2^{-m+1} - 1)}{(2^{-m} - 1)\pi^{-m+1}} \operatorname{cof.} \frac{(1-m)\pi}{2},$$

où puisque $1.2.3.\ldots(-m) = [-m]$ & $[m][-m] = \frac{m\pi}{\sin m\pi}$, nous aurons $1.2.3\ldots(-m) = \frac{m\pi}{1.2.3\ldots m \sin m\pi} = \frac{\pi}{1.2.3\ldots(m-1)\sin m\pi}$. Enſuite on ſait que cof. $\frac{(1-m)\pi}{2} = \sin\frac{m\pi}{2}$, & par ces ſubſtitutions l'expreſſion trouvée prendra cette forme: $- \frac{2(2^{m-1} - 1)\pi^m}{(2^m - 1)\,1.2.3\ldots(m-1)\,\mathrm{f.}\,m\pi} \sin\frac{m\pi}{2} =$

$$- \frac{(2^{m-1} - 1)\pi^m}{1.2.3..(m-1)(2^m - 1) \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2}},$$

à cauſe de $\sin m\pi = 2 \sin\frac{m\pi}{2} \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2}$. Maintenant, nous n'avons qu'à renverſer l'équation trouvée en mettant en haut les dénominateurs & en bas les numérateurs, & nous obtiendrons cette équation

$$\frac{1 - 2^{m-1} + 3^{m-1} - 4^{m-1} + 5^{m-1} - 6^{m-1} + \&c.}{1 - 2^{-m} + 3^{-m} - 4^{-m} + 5^{-m} - 6^{-m} + \&c.} =$$
$$- \frac{1.2.3\ldots(m-1)(2^m - 1)}{(2^{m-1} - 1)\pi^m} \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2},$$

qui étant la même que la ſuppoſée, on voit clairement que ſi la ſup-

 poſée

posée est vraye pour les cas où n est un nombre positif, elle le sera aussi, quand n est un nombre négatif, à cause de $m = -n + 1$.

14. Il se présente encore un cas bien remarquable en posant $n = \frac{1}{2}$, qui conduit à cette fraction

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \&c.}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \&c.}$$

dont le numérateur & le dénominateur étant égaux, & partant la valeur $= 1$, il faut prouver que l'expression, qui en vertu de la conjecture lui est égale, savoir:

$$-\frac{1.2.3\ldots(-\frac{1}{2})(\sqrt{2}-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\pi}} \text{ cos. } \frac{\pi}{4} = + \frac{[-\frac{1}{2}]\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{[-\frac{1}{2}]}{\sqrt{\pi}}$$

Or j'ai démontré autrefois, en examinant la progression hypergéométrique $1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4$, &c. dont le terme général est $1.2.3\ldots n = [n]$, que posant $n = \frac{1}{2}$, on a $[\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, & puisque $[\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}]$, il est évident que $[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, & partant notre expression devient effectivement $= 1$. Ce qui ne sauroit plus laisser aucun doute sur la vérité de notre conjecture, l'ayant démontrée non seulement pour tous les cas où l'exposant n est un nombre entier quelconque, soit négatif, soit positif, mais aussi pour le cas $n = \frac{1}{2}$. Pour les autres cas des nombres rompus, qu'on voudroit mettre au lieu de n, on ne sauroit prétendre une démonstration particuliere, attendu que qu'on n'a encore découvert aucune méthode propre pour déterminer la somme d'une telle série $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n -$ &c. lorsque l'exposant n est une fraction. Dans ces cas il faut se contenter d'approximations: or on verra aussi alors, que notre conjecture est d'accord avec la vérité.

15. Pour en faire un essai, soit $n = \frac{3}{2}$, & cette fraction

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \&c.}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} + \&c.},$$ à cause de

$1.\,2.\,3 \ldots (n-1) = [\tfrac{1}{2}] = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, & cos. $\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, doit être égale à cette quantité $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2(2-\sqrt{2})\pi} = \frac{3+\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0,4967738$.

Mais la série supérieure, en ajoutant les 9 premiers termes, donne

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{8} + \sqrt{9} = 1,9217396662,$$

d'où il faut retrancher la somme de tous les termes suivans à l'infini $\sqrt{10} - \sqrt{11} + \sqrt{12} - \sqrt{13} + \sqrt{14} - \&c.$ laquelle par le §. 7. est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1(2^2-1)}{4} \cdot \frac{A}{\sqrt{10}} + \frac{1.1.3(2^4-1)}{4^3} \cdot \frac{B}{10^2\sqrt{10}} -$$

$$\frac{1.1.3.5.7}{4^5}(2^6-1) \cdot \frac{C}{10^4\sqrt{10}} + \frac{1.1.3.5.7.9.11}{4^7}(2^8-1)\frac{D}{10^6\sqrt{10}}.\ \&c.$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\left(1 - \frac{1.3}{2} \cdot \frac{A}{10} + \frac{1.1.3.15}{2^5} \cdot \frac{B}{10^3} - \frac{1.1.3.5.7.63}{2^9} \cdot \frac{C}{10^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1.1.3.5.7.9.11.255}{2^{13}} \cdot \frac{D}{10^7} - \&c.\right)$$

Or ayant $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$, la valeur de cette expression résulte $= 0,48750774577 \cdot \sqrt{10}$, qui est à peu près $= 1,541610$, & partant la série supérieure $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \&c. = 0,380129$.

Ensuite, pour la série inférieure, les 9 premiers termes donnent 0,7821470744, d'où il faut retrancher la somme de tous les suivans,

qui

qui eſt $= \frac{1}{20\sqrt{10}} \left(1 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{A}{10} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 15}{2^5} \cdot \frac{B}{10^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 63}{2^9} \cdot \frac{C}{10^5} - \&c. \right)$, & à peu près $= 0{,}01698880$, d'où la ſomme de cette ſérie infinie ſera $= 0{,}765158$. Voyons donc ſi la premiere ſérie diviſée par celle-cy, ou bien cette fraction $\frac{0{,}380129}{0{,}765158}$, eſt égale à la valeur $0{,}4967738$; or la différence eſt ſi petite, ne montant qu'à deux cent-milliemes parties de l'unité, que l'on ne ſauroit douter, que la choſe ne ſoit vraye à la derniere rigeur.

16. Puiſque donc notre conjecture eſt portée au plus haut degré de certitude, qu'il ne reſte plus même aucun doute ſur les cas où l'on met pour l'expoſant n des fractions, mettons devant les yeux les cas, où n eſt une fraction de cette eſpece $\frac{2i+1}{2}$, qui ſont

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \&c.} = + \frac{1\,(2\sqrt{2} - 1)}{2^1\,(2 - \sqrt{2})\pi},$$

$$\frac{1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^2\sqrt{2}} + \frac{1}{3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{4^2\sqrt{4}} + \&c.} = + \frac{1 \cdot 3\,(4\sqrt{2} - 1)}{2^2\,(4 - \sqrt{2})\pi^2},$$

$$\frac{1 - 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt{3} - 4^2\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^3\sqrt{2}} + \frac{1}{3^3\sqrt{3}} - \frac{1}{4^3\sqrt{4}} + \&c.} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\,(8\sqrt{2} - 1)}{2^3\,(8 - \sqrt{2})\pi^3},$$

$$\frac{1 - 2^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{3} - 4^3\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^4\sqrt{2}} + \frac{1}{3^4\sqrt{3}} - \frac{1}{4^4\sqrt{4}} + \&c.} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,(16\sqrt{2} - 1)}{2^4\,(16 - \sqrt{2})\pi^4},$$

$$\frac{1-2^4\sqrt{2}+3^4\sqrt{3}-4^4\sqrt{4}+\&c.}{1-\frac{1}{2^5\sqrt{2}}+\frac{1}{3^5\sqrt{3}}-\frac{1}{4^5\sqrt{4}}+\&c.}=+\frac{1.3.5.7.9\,(32\sqrt{2}-1)}{2^5\,(32-\sqrt{2})\,\pi^5},$$

$$\frac{1-2^5\sqrt{2}+3^5\sqrt{3}-4^5\sqrt{4}+\&c.}{1-\frac{1}{2^6\sqrt{2}}+\frac{1}{3^6\sqrt{3}}-\frac{1}{4^6\sqrt{4}}+\&c.}=+\frac{1.3.5.7.9.11\,(64\sqrt{2}-1)}{2^6\,(64-\sqrt{2})\,\pi^6},$$

$$\frac{1-2^6\sqrt{2}+3^6\sqrt{3}-4^6\sqrt{4}+\&c.}{1-\frac{1}{2^7\sqrt{2}}+\frac{1}{3^7\sqrt{3}}-\frac{1}{4^7\sqrt{4}}+\&c.}=-\frac{1.3.5.7.9.11.13\,(128\sqrt{2}-1)}{2^7\,(128-\sqrt{2})\,\pi^7},$$

&c.

où il faut remarquer que la fraction générale $\frac{2^\lambda\sqrt{2}-1}{2^\lambda-\sqrt{2}}$, ſe réduit à celle-cy $\frac{(2^{2\lambda}-1)\sqrt{2}+2^\lambda}{2^{2\lambda}-2}$. Donc, de chaque paire de ces ſéries, dès qu'on a trouvé la ſomme de l'une, on en trouvera celle de l'autre par le moyen de la quadrature du cercle.

17. A l'égard des ſéries réciproques des puiſſances

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\&c.$$

j'ai déjà obſervé, que leurs ſommes ne ſauroient être aſſignées que lorsque l'expoſant n eſt un nombre entier pair, & que pour les cas où n eſt un nombre entier impair, tous mes ſoins ont été juſqu'ici inutiles. Maintenant, ayant réduit la ſomme de ces ſéries réciproques à celle des directes, ſavoir à celle-cy en général

$$1-2^{n-1}+3^{n-1}-4^{n-1}+5^{n-1}-6^{n-1}+\&c.$$

on auroit pu s'attendre, que de là on trouveroit quelque route pour parvenir à ce but; mais il arrive malheureuſement, que dans les cas où n est un nombre impair, la somme de cette série directe évanouït, en sorte qu'on n'en sauroit rien conclure: or sans cet accident la formation desdites séries n'auroit aucune difficulté: car, posant $n = 2\lambda + 1$, en vertu de notre heureuse conjecture nous aurons:

$$1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \&c. =$$

$$- \frac{(2^{2\lambda}-1)\pi^{2\lambda+1}}{1.2.3\ldots.2\lambda(2^{2\lambda+1}-1)} \cdot \frac{1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} - \&c.}{\cos. \frac{2\lambda+1}{2}\pi}.$$

Or, dans le dernier membre de cette expression, tant le numérateur $1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda}$ &c. que le dénominateur $\cos. \frac{2\lambda+1}{2}\pi = - \sin \lambda\pi$, évanouit, en supposant λ un nombre entier. Il est bien vrai qu'on peut découvrir aisément la valeur d'une telle fraction, en substituant au lieu du numérateur & du dénominateur leurs différentiels, mais par ce moyen on ne gagnera pas grand' chose, comme je m'en vai faire voir.

18. Donc, conformément à cette méthode, le différentiel du numérateur étant

$$2d\lambda(1^{2\lambda}/1 - 2^{2\lambda}/2 + 3^{2\lambda}/3 - 4^{2\lambda}/4 + \&c.)$$

& celui du dénominateur $= - \pi d\lambda \cos. \lambda\pi$, nous aurons pour notre cas la somme exprimée en sorte

$$1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \&c. =$$

$$\frac{2(2^{2\lambda}-1)\pi^{2\lambda}}{1.2.3\ldots.2\lambda(2^{2\lambda+1}-1)\cos.\lambda\pi} \cdot (1^{2\lambda}/1 - 2^{2\lambda}/2 + 3^{2\lambda}/3 - 4^{2\lambda}/2 + \&c.)$$

d'où

d'où nous tirons, en ſubſtituant pour λ les nombres 1. 2. 3 &c. les ſommations ſuivantes:

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\&c = -\frac{2.3.\pi^2(1l1-2^2l2+3^2l3-4^2l4+\&c.)}{1.\ 2.\ 7}$$

$$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\&c. = +\frac{2.15.\pi^4(1l1-2^4l2+3^4l3-4^4l4+\&c.)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 31}$$

$$1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\&c. = -\frac{2.63.\pi^6(1l1-2^6l2+3^6l3-4^6l4+\&c.)}{1.\ 2.\ 3\ldots 6.\ 127}$$

$$1-\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}-\frac{1}{4^9}+\&c. = +\frac{2.255.\pi^8(1l1-2^8l2+3^8l3-4^8l4+\&c.)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots 8.\ 511}$$

$$1-\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}-\frac{1}{4^{11}}+\&c. = -\frac{2.1023.\pi^{10}(1l1-2^{10}l2+3^{10}l3-4^{10}l4+\&c.)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots 2047}$$

&c.

Il faudroit donc qu'on pût trouver les ſommes des ſéries compriſes dans cette forme:

$$1^{2\lambda}l1-2^{2\lambda}l2+3^{2\lambda}l3-4^{2\lambda}l4+\ \&c.$$

Mais cette recherche eſt peut-être plus difficile que celle que nous avons en vue; & je n'entrevois aucune méthode qui nous puiſſe conduire au but propoſé.

19. Ces équations deviennent un peu plus ſimples en conſidérant que cette ſérie $1+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+$ &c. eſt égale à celle-cy

$$\frac{2^m-1}{2(2^{m-1}-1)}\left(1-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}-\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}-\&c.\right.$$

d'où nous tirons d'abord en général

$1+$

$$1 + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} + \frac{1}{7^{2\lambda+1}} + \frac{1}{9^{2\lambda+1}} + \&c. =$$

$$- \frac{\pi^{2\lambda}}{1.2.3\ldots 2\lambda \cos. \lambda\pi} (2^{2\lambda}l2 - 3^{2\lambda}l3 + 4^{2\lambda}l4 - 5^{2\lambda}l5 + \&c.$$

& enſuite pour les cas particuliers:

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. = + \frac{\pi^2 (2^2 l2 - 3^2 l3 + 4^2 l4 - \&c.)}{1.2}$$

$$1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \&c. = - \frac{\pi^4 (2^4 l2 - 3^4 l3 + 4^4 l4 - \&c.)}{1.2.3.4.}$$

$$1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \&c. = + \frac{\pi^6 (2^6 l2 - 3^6 l3 + 4^6 l4 - \&c.)}{1.2.3.4.5.6.}$$

$$1 + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{7^9} + \&c. = - \frac{\pi^8 (2^8 l2 - 3^8 l3 + 4^8 l4 - \&c.)}{1.2.3.4.5.6.7.8.}$$

&c.

Or ici il faut bien remarquer que la ſomme générale de ces deux derniers paragraphes n'eſt vraie que lorſque l'expoſant λ eſt un nombre entier poſitif, puiſqu'elle eſt fondée ſur cette condition, que la ſomme de cette ſérie:

$1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + \&c.$ eſt zéro: donc, comme cela n'eſt plus vrai dans le cas $\lambda = 0$, on ne peut mettre pour λ que les nombres 1, 2, 3. 4, 5 &c. J'ajoute encore cette remarque de cette ſérie $l2 - l3 + l4 - l5 + \&c.$ la ſomme eſt $= \frac{1}{2} l \frac{\pi}{2}$, ce qui laiſſe quelque eſpérance de réuſſir enfin auſſi dans les ſéries auxquelles j'ai été conduit ici.

20. De la même maniere on peut comparer enſemble les ſommes de ces deux ſéries infinies

$$1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c. \quad \& \quad 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \&c.$$

& une conjecture ſemblable nous fournit ce *théorême*

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c.}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \&c.} = \frac{1.2.3\ldots(n-1).2^n}{\pi^n} \sin\frac{n\pi}{2},$$

où il arrive que, dans les cas où n eſt un nombre entier poſitif pair, la ſomme de la ſérie ſupérieure évanouit; & dans ces cas auſſi le ſinus de l'angle $\frac{n\pi}{2}$, devient zéro. Donc, poſant $n = 2\lambda$, nous aurons:

$$1 - \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} - \frac{1}{7^{2\lambda}} + \&c. =$$

$$\frac{-\pi^{2\lambda-1}(3^{2\lambda-1}\, l3 - 5^{2\lambda-1}\, l5 + 7^{2\lambda-1}\, l7 - \&c.)}{1.2.3\ldots(2\lambda-1)\, 2^{2\lambda-1} \cos\lambda\pi},$$

prenant pour λ un nombre entier poſitif quelconque. De là nous tirons les ſommations ſuivantes:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \&c. = + \frac{\pi(3l3 - 5l5 + 7l7 - \&c.)}{1.2^1},$$

$$1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \&c. = - \frac{\pi^3(3^3 l3 - 5^3 l5 + 7^3 l7 - \&c.)}{1.2.3.2^3},$$

$$1 - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7^6} + \&c. = + \frac{\pi^5(3^5 l3 - 5^5 l5 + 7^5 l7 - \&c.)}{1.2.3.4.5.2^5},$$

$$1-\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{7^8}+\&c. = -\frac{\pi^7(3^7 l3 - 5^7 l5 + 7^7 l7 - \&c.)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 2^7},$$

$$1-\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\frac{1}{7^{10}}+\&c. = +\frac{\pi^9(3^9 l3 - 5^9 l5 + 7^9 l7 - \&c.)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 9.\ 2^9}.$$

Cette derniere conjecture renferme une expreſſion plus ſimple que la précédente; donc, puiſqu'elle eſt également certaine, il y a à eſpérer qu'on travaillera avec plus de ſuccès à en chercher une démonſtration parfaite, qui ne manquera pas de répandre beaucoup de lumiere ſur quantité d'autres recherches de cette nature.