מרצים: ע.אייזנמן, א.לרמן,ל.ספיר ,ד.קרנר

שאלה מס' 1. (א) תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$. האם הפונקציה רציפה?

(ב) באילו נקודות קיימות נגזרות חלקיות?   האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

<u>פתרון</u>

א) פונקציה $g(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}$ אלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה $R^2\setminus(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}=0$$ כי

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}\right|\le$$

$$\left|\frac{x^3}{x^2\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{y^3}{y^2\ln 3}\right|,\ 0\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2\ln 3}\right|\le\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{y}{\ln 3}\right|$$

לכן הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}g(x,y), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה גם ב $(0,0)$ כי $f(x,y)$ מוגדרת ב $(0,0)$ ו-

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$$

ב) הפונקציה $f(x,y)$ גזירה בתחום $R^2\setminus(0,0)$. נבדוק האם קיימות נגזרות חלקיות ב $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x^3/\left(\Delta x^2\sqrt{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{1}{\ln 3}$$

כן קיימות נגזרות חלקיות ב- $(0,0)$. נבדוק האם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$ אם $\Delta f(0,0)=df(0,0)+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$.

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{\Delta x^2\sqrt{2}+\Delta y^2\ln 3},\quad df(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta x+\frac{1}{\ln 3}\Delta y$$

$$\frac{\Delta f(0,0)-df(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\dfrac{\Delta x^3+\Delta y^3}{\Delta x^2\sqrt{2}+\Delta y^2\ln 3}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta x-\dfrac{1}{\ln 3}\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},\ \lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta f(0,0)-df(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{2\Delta x^3}{\Delta x^2\left(\sqrt{2}+\ln 3\right)}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\ln 3}\right)\Delta x}{|\Delta x|\sqrt{2}}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2/\left(\sqrt{2}+\ln 3\right)-\left(1/\sqrt{2}+1/\ln 3\right)}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\neq0$$

לכן הפונקציה $f(x,y)$ אינו דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

<u>שאלה מס' 2</u>. (א) הוכיחו כי למשוואה $2xy+y^2z+4e^z=0$ יש פתרון יחיד וגזיר בסביבה של $x=1\,,\,y=2\,,\,z=0$.

מצאו את הערך הקטן/הגדול ביותר של הנגזרת הכיוונית $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{v}}$ כאשר $x=1,y=-2$ ו- $z=0$.

(ב) מצאו את המשוואה של המישור המשיק לגרף של $z(x,y)$ ואת הנורמל למישור בנקודה $(1,-2,0)$.

<u>פתרון</u> א) עבור הפונקציה $F(x,y,z)=2xy+y^2z+4e^z=0$ מתקיים

1) $F(M_0)=F(1,-2,0)=2\cdot1\cdot(-2)+(-2)\cdot0+4e^0=0$

2) $F'_x=2y\,,\,F'_y=2x+2yz\,,\,F'_z=y^2+4e^z$ רציפות ב R^3 (לכן רציפות בסביבה של הנקודה M_0).

3) $F'_z=y^2+4e^z\neq0$ כי $F'_z=y^2+4e^z>0$

לכן קיימת סביבה של הנקודה M_0 שבה המשוואה $F(x,y,z)=0$ מגדירה פונקציה יחידה $z=f(x,y)$ כך ש- $F(x,y,z(x,y))=0$ ומתקיים:

1) $z_0=f(x_0,y_0)$, 2) $z=f(x,y)$ רציפה בנקודה (x_0,y_0), 3) בעלת ניגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0) ו- $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}$

$$F'_x(1,-2,0)=-4\,,\,F'_y(1,-2,0)=2\,,\,F'_z(1,-2,0)=8$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)=-\frac{-4}{8}=\frac{1}{2}\,,\,\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2)=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

הוכחנו כי בסביבה של הנקודה $(1,-2,0)$ המשוואה $2xy+y^2z+4e^z=0$ מגדירה פונקציה יחידה $z=f(x,y)$ בעלת ניגזרות חלקיות רציפות בנקודה $(1,-2)$ ולכן גזירה בסביבה של $(1,-2,0)$.

$$\max\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\|grad\ z(x_0,y_0)\|\,,\,\min\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=-\|grad\ z(x_0,y_0)\|$$

$$grad\ z(1,-2)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)(1,-2)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right),\|grad\ z(1,-2)\|=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\max\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(1,-2)=\frac{\sqrt{5}}{4}\,,\,\min\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(1,-2)=-\frac{\sqrt{5}}{4}$$

ב) המשוואת המישור המשיק לגרף של $z(x,y)$ בנקודה $(1,-2,0)$: $z-0=\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{4}(y+2)$

או $z=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}y-1$. וקטור $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1\right)$ וגם וקטור $(2,-1,-4)$ הנורמל למישור .

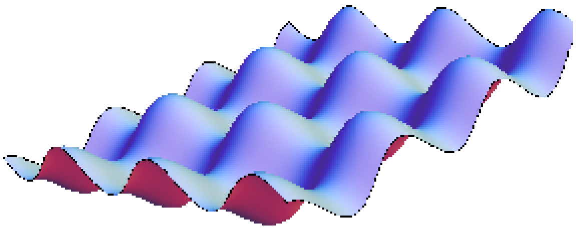
<u>שאלה מס' 3</u>. (א) מצאו ומיינו את כל הנקודות הקיצון של $z=f(x\,,\,y)=\sin x-\cos y$.

<u>פתרון</u>

$$\begin{cases} z'_x=\cos x=0\\ z'_y=\sin y=0\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x_k=\pi/2+\pi k\\ y_n=\pi n\end{matrix},\ \begin{cases} z''_{xx}(x_k,y_n)=-\sin x_k=(-1)^{k+1}\\ z''_{yy}(x_k,y_n)=\cos y_n=(-1)^n\end{cases}\quad z''_{xy}(x_k,y_n)=0$$

$k,n\in Z$

$$z''_{xx}z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2\Big|_{(x_k,y_n)}=(-1)^{k+n+1},\ f(x_k,y_n)=(-1)^k-(-1)^n$$



נקודות (x_k,y_n) אוכף אם $k+n$ מספר זוגי. (x_k,y_n) נקודות הקיצון

אם $k+n+1$ מספר זוגי. (x_k,y_n) נקודת מקסימום אם $k\ ,\ n+1$

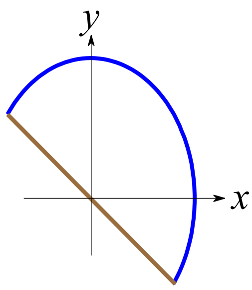
מספרים זוגיים ו (x_k,y_n) נקודת מינימום $k+1\,,\ n$ מספרים זוגיים

$$f_{\max}=f\left(\pi/2+2\pi l\ ,\ \pi(2m+1)\right)=2$$
$$f\left(\pi/2+2\pi l\ ,\ 2\pi m\right)=0$$

$$f_{\min}=f\left(\frac{\pi}{2}+\pi(2l+1)\ ,\ 2\pi m\right)=-1-1=-2\ ,\ l,m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

ב) מצאו את כל נקודות המינימום/מקסימום המוחלטים של $f(x,y)=\sin\left(x^2-y^2\right)$

בתחום $D=\left\{16x^2+9y^2\le\pi\ ,\ x+y\ge0\right\}$



<u>פתרון</u> בתחום D $|x|\le\frac{\sqrt{\pi}}{4}\ ,\ |y|\le\frac{\sqrt{\pi}}{3}$,

$\left(\pm\sqrt{\pi}/5\ ,\ \mp\sqrt{\pi}/5\right)$ נקודות חיתוך של $16x^2+9y^2=\pi$ ו- $x=-y$ כי

$16x^2+9x^2=\pi\Rightarrow|x|=|y|=\frac{\sqrt{\pi}}{5}$.

נמצא נקודות חשודות בתחום פתוח $D_1=\left\{16x^2+9y^2<\pi\ ,\ x+y>0\right\}$

$$z'_x=2x\cos\left(x^2-y^2\right)=0\ ,\ z'_y=-2y\cos\left(x^2-y^2\right)=0\ ,\ (0\ ,0)\notin D_1$$

בתחום D $\cos\left(x^2-y^2\right)\ne0$ כי

$$\begin{matrix} if\quad |x|\ge|y|\Rightarrow x^2-y^2\le x^2\le\frac{\pi}{16}\\ if\quad |y|\ge|x|\Rightarrow y^2-x^2\le y^2\le\frac{\pi}{9}\end{matrix}\Rightarrow\left|x^2-y^2\right|\le\frac{\pi}{9}\Rightarrow\cos\left(x^2-y^2\right)>0$$

נמצא נקודות חשודות על הישר $x+y=0$: $f(x,-x)=\sin0=0$ אין נקודות חשודות.

נמצא נקודות חשודות על האליפסה $16x^2+9y^2=\pi$

$$x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cos t\ ,\ y=\frac{\sqrt{\pi}}{3}\sin t,\ g(t)=f\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{16}\cos^2 t-\frac{\pi}{9}\sin^2 t\right)$$

$$g'(t)=\left(-\frac{2\pi}{16}\cos t\sin t-\frac{2\pi}{9}\sin t\cos t\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\cos^2 t-\frac{\pi}{9}\sin^2 t\right)=-\frac{25\pi}{16\cdot 9}\cos\left(x^2-y^2\right)\sin 2t$$

$$\cos\left(x^2-y^2\right)\neq 0\Rightarrow \sin 2t=0\,,\quad t=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,,\ y=0\,,\quad t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=0\,,\ y=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

נמצא $f\left(x\,,\,y\right)$ בנקודות $\left(\sqrt{\pi}\,/\,4\,,\,0\right),\left(0\,,\,\sqrt{\pi}\,/\,3\right),\left(\pm\sqrt{\pi}\,/\,5\,,\,\mp\sqrt{\pi}\,/\,5\right)$

$$f\left(\sqrt{\pi}\,/\,4\,,\,0\right)=\sin\left(\pi\,/16\right),\qquad f\left(0\,,\,\sqrt{\pi}\,/\,3\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{9}\right),\qquad f\left(\pm\sqrt{\pi}\,/\,5\,,\,\mp\sqrt{\pi}\,/\,5\right)=0$$

$$\min_D f\left(x\,,\,y\right)=-\sin\left(\pi\,/\,9\right),\quad \max_D f\left(x\,,\,y\right)=\sin\left(\pi\,/16\right)$$

<u>הערה</u> בתחום $|x|<|y|$:

$$-\pi\,/\,9\leq -y^2<x^2-y^2\leq 0\qquad -\sin(y^2)\leq\sin(x^2-y^2)\leq 0\qquad \min_D f(x\,,\,y)=-\sin(\pi\,/\,9)$$

בתחום $|x|>|y|$:

$$0<x^2-y^2\leq x^2\leq\pi\,/16\qquad 0\leq\sin(x^2-y^2)\leq\sin(x^2)\qquad \max_D f\left(x\,,\,y\right)=\sin\left(\pi\,/16\right)$$

<u>שאלה מס' 4</u>.

(א) מצאו את כל נקודות המינימום/מקסימום המקומיים של $f\left(x\,,\,y\right)=|\,3x\,|+x^4y^2$

<u>פתרון</u> לא קיימת $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ אבל $f\left(-x\,,\,y\right)=f\left(x\,,-\,y\right)=f\left(-x\,,-\,y\right)=f\left(x\,,\,y\right)$

לכן אם $\left(x_0\,,\,y_0\right)$ נקודת קיצון אז גם $\left(-x_0\,,\,y_0\right),\left(x_0\,,-\,y_0\right),\left(-x_0\,,-\,y_0\right)$, נקודות קיצון.

לכן נבדוק $f\left(x\,,\,y\right)$ כאשר $x>0$: $f\left(x\,,\,y\right)=3x+x^4y^2$.

$grad\left(3x+x^4y^2\right)=\left(3+4x^3y^2,2x^4y\right)\neq(0,0)$. נבדוק $f\left(0\,,\,y\right)$:

$$f\left(0\,,\,0\right)=0\quad ,\forall\left(x\,,\,y\right)\quad f\left(x\,,\,y\right)\geq 0\,,\ f\left(0\,,\,y\right)=0$$

$\left(0\,,\,0\right)$ נקודת מינימום מקומי וגם מינימום מוחלט. אין נקודות מקסימום.

ב) תהי $f\left(x\,,\,y\right)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות.

נתון: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-3\,,\,6)}=-2\,,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(-3\,,\,6)}=1$. נגדיר $\varphi(u,v,w)=f\left(u^2-v^2,u^2vw\right)$.

חשבו מכפלה סקלרית של $\left.\mathrm{grad}\varphi\right|_{(1,2,3)}$ בווקטור $(1,1,1)$.

<u>פתרון</u> $\varphi(u,v,w)=f\left(x,y\right)$ כאשר $x=u^2-v^2,\,y=u^2vw$.

אם $u_0=1,v_0=2\,,\,w_0=3$ אז $x_0={u_0}^2-{v_0}^2=1-4=-3,\,y_0={u_0}^2v_0w_0=1\cdot2\cdot3=6$.

$$\mathrm{grad}\varphi=\left(\varphi'_u\,,\,\varphi'_v\,,\,\varphi'_w\right),\quad \mathrm{grad}\varphi\cdot(1\,,1\,,1)=\varphi'_u+\varphi'_v+\varphi'_w=\left(f'_xx'_u+f'_yy'_u\right)+$$

$$\left(f_x'x_v'+f_y'y_v'\right)+\left(f_x'x_w'+f_y'y_w'\right)=f_x'\left(x_u'+x_v'+x_w'\right)+f_y'\left(y_u'+y_v'+y_w'\right)=$$

$$f_x'(2u-2v+0)+f_y'\left(2uvw+u^2w+u^2v\right)=\left(f_x',f_y'\right)\cdot\left(2u-2v\,,\,2uvw+u^2w+u^2v\right)$$

$$\operatorname{grad}\varphi\big|_{(1,2,3)}\cdot(1,1,1)=\left(f_x',f_y'\right)\Big|_{(-3,6)}\cdot\left(2u-2v\,,\,2uvw+u^2w+u^2v\right)\Big|_{(1,2,3)}=$$

$$(-2,1)\cdot(2-4\,,\,12+3+2)=(-2,1)\cdot(-2\,,\,17)=21$$