

תרגול 2
אלגברה של וקטורים

תרגילים :

1. במקבילית $ABCD$ $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. בטא באמצעות \vec{b} , \vec{a} את \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{MD} , כאשר M היא נקודת חיתוך האלכסונים.
2. הוקטורים \vec{a} & \vec{b} יוצרים זווית בת 120° ו- $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. חשב :
 - א. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 - ב. $\vec{a} \cdot \vec{a}$
 - ג. $(\vec{a} + \vec{b})^2$
 - ד. $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$
3. הוכח את הזהות $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$ ותן לה פירוש גיאומטרי.
4. חשב את אורכי האלכסונים במקבילית הבנויה על הוקטורים $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, כאשר $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
5. הוכח כי אלכסוני המעוין ניצבים.
6. נתון $|\vec{s}| = 1$, $|\vec{t}| = 1$, $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$, $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$, $\vec{q} \perp \vec{p}$. חשב את הזווית בין הוקטורים \vec{s} , \vec{t} .
7. חשב את $\vec{a} \cdot \vec{b}$ כאשר $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$.
8. חשב את הזווית בין הוקטורים \vec{a} , \vec{b} כאשר $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$.
9. חשב את הזווית המשולש ABC כאשר $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 2\vec{j}$. מצא את \overrightarrow{CA} .
10. חשב את ההיטל של הוקטור $\vec{a} = 10\vec{i} + 2\vec{j}$ על הוקטור $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.
11. חשב את ההיטל של הוקטור $\vec{b} = (1, -1, 4)$ על הוקטור $\vec{a} = (1, 1, 2)$.
12. חשב את האורך של התיכון AM והגובה AD במשולש ABC בעל הצלעות $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.
13. חשב את הזווית המשולש ABC כאשר $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 0, 5)$.
14. מצא נקודה D וזווית בין האלכסונים \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} במקבילית $ABCD$ כאשר $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$, $C(5, 0, 2)$.
15. עבור אילו ערכים של α ו- β הוקטורים $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ קולינאריים?
16. הוכח כי הנקודות $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, -4)$, $C(2, -1, -1)$, $D(1, -1, 1)$ הן קדקודים של טרפז.
17. קדקודיו של משולש הם $A(5, 0, 1)$, $B(1, -5, 2)$, $C(3, -1, 0)$. מצא את שיעורי נקודת מפגש התיכונים (מרכז הכבד של המשולש).
18. מצא $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ כאשר $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.
19. הוכח שהמרובע $ABCD$ הוא ריבוע אם $A(2, 1)$, $B(4, 0)$, $C(5, 2)$, $D(3, 3)$.
20. נתון $A(6, -4, 2)$, $B(3, 2, 3)$, $C(3, -5, -1)$. הוכח כי משולש ABC הוא ישר זווית.
21. נתון $A(2, 1, -4)$, $B(1, 3, 5)$, $C(7, 2, 3)$, $D(8, 0, -6)$. הוכח כי $ABCD$ הוא מקבילית.
22. חשב $|2\vec{a} - \vec{b}|$ אם $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
23. חשב את קוסינוסי הכיוון של $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
24. וקטור \vec{a} יוצר זווית $\beta = 60^\circ$ עם ציר ה- y , זווית $\gamma = 120^\circ$ עם ציר ה- z וזווית α עם ציר ה- x . חשב $\cos \alpha$.
25. יהיו $A(11, -5, 9)$, $B(-8, -1, 1)$. מצא וקטור יחידה שכיוונו מ- A ל- B .
26. יהי $A(2, -1, 7)$. מצא נקודה B כזאת ש- $AB = 34$ והוקטור \overrightarrow{AB} מקביל לוקטור $8\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$.
27. חשב את $\vec{a} \times \vec{b}$ כאשר $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
28. חשב את שטח המשולש ABC כאשר $A(3, 6, 4)$, $B(4, 2, -1)$, $C(2, 3, 5)$.

29. חשב את שטח המקבילית הבנויה על וקטורים $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

30. חשב את שטח המקבילית הבנויה על וקטורים $3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 3\vec{b}$ כאשר $|\vec{b}| = |\vec{a}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$

31. נתון $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. מצא $(3\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 6\vec{n})$, $|(3\vec{m} - 2\vec{n}) \times (5\vec{m} - 6\vec{n})|$

32. נתון $\vec{c} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$, $\vec{a} = (2, -3, 1)$. חשב את $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ואת $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

33. חשב את מכפלה מעורבת $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ כאשר $\vec{c} = (1, 1, 4)$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

34. הוכח כי הוקטורים $\vec{c} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, $\vec{a} = (2, 5, 7)$ קופלנריים.

35. מצא נפח של פירמידה ABCD כאשר $A(2, 2, 2)$, $B(4, 3, 3)$, $C(4, 5, 4)$, $D(5, 5, 6)$.

36. הוכח כי הנקודות $D(2, 2, 2)$, $C(2, 1, 2)$, $B(1, 1, 1)$, $A(1, 2, 1)$ נמצאות על מישור אחד.

37. הוכח: אם $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, אזי $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ קופלנריים.

38. הוכח שהוקטור $\vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\vec{a}^2}$ מאונך לוקטור \vec{a} .

תשובות:

1) $\vec{MD} = 0.5(\vec{b} - \vec{a})$, $\vec{MC} = 0.5(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{MB} = 0.5(\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{MA} = -0.5(\vec{a} + \vec{b})$

2) -6, 9, 13, 43 4) $\sqrt{593}$ 6) $\frac{\pi}{3}$ 7) 9 8) $\frac{\pi}{4}$ 9) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, $\vec{CA} = (1, -3)$

10) $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 2$ 11) $pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{8}{\sqrt{6}}$ 12) $|\vec{AM}| = 6$, $\frac{\vec{BA}}{BC} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $|\vec{AD}| = \sqrt{28.8}$

13) $\cos(\hat{A}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$, $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$ 14) $D(-1, 1, 1)$, 120^0

15) $\alpha = -7.5$, $\beta = -0.8$ 17) $(3, -2, 1)$ 18) 13 22) 2 23) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

24) $45^0, 135^0$ 25) $\left(-\frac{19}{21}, \frac{4}{21}, \frac{-8}{21}\right)$ 26) $(-14, -19, 31), (18, 17, -17)$

27) $(-7, 3, 1)$ 28) $\frac{\sqrt{426}}{2}$ 29) 49 30) 4 31) $336, 96\sqrt{3}$

32) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 7(-1, 2, -1)$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (10, 13, 19)$

33) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 33$ 35) $V = \frac{7}{6}$