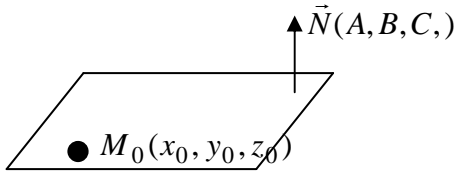


תרגול 3  
גיאומטריה אנליטית במרחב



I מישור

1. המשוואה הכללית של מישור :  $Ax + By + Cz + D = 0$

2. המשוואה של מישור שעובר דרך הנקודה  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

ומאונך לוקטור  $\vec{N}(A, B, C)$  :  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3. זווית בין מישורים (1), (2) אם  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  וקטורים מאונכים למישורים (1), (2) :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$$

(א) אם  $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$  כלומר  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$  אזי מישורים מקבילים

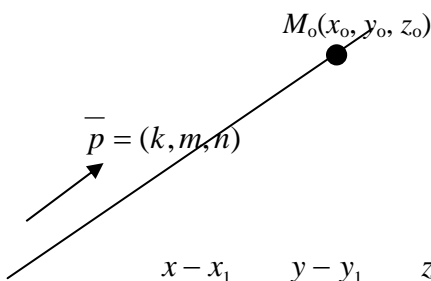
(ב) אם  $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$  כלומר  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$  אזי מישורים מאונכים

3. מרחק מנקודה  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  למישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  :  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

II ישר במרחב

1. ישר כחיתוך של שני מישורים (משוואה כללית)  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

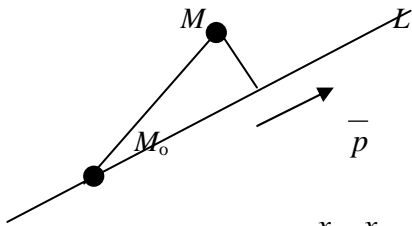
2. משוואה קנונית של הישר  $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$



3. משוואה פרמטרית של הישר  $\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

4. ישר העובר דרך שתי נקודות  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  :  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

5. זווית בין הישרים :  $\cos \alpha = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}$



6. מרחק מנקודה M לישר L :  $d = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}$

III מצב הדדי של ישר ומישור נתונים הישר  $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$  ,  $\vec{p} = (k, m, n)$

והמישור  $Ax + By + Cz + D = 0$   $\vec{N} = (A, B, C)$

1. הישר מקביל למישור (כלומר  $\vec{N} \perp \vec{p}$ )  $Ak + Bm + Cn = 0$

2. הישר מאונך למישור (כלומר  $\vec{N} \parallel \vec{p}$ )  $\frac{A}{k} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

3. זווית בין ישר למישור :  $\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{p}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{p}|}$

**תרגילים :**

3. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה  $(3,-2,5)$  ומאונך לוקטור  $(4,-3,1)$ .
4. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות  $(1,2,-1)$  ו-  $(-5,2,7)$  ומקביל ל-  
 א. ציר  $x$       ב. ציר  $y$       ג. הוקטור  $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
39. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות:  
 א.  $(4,1,1), (2,3,1), (1,0,-1)$       ב.  $(0,1,-5), (1,-2,2), (2,0,-1)$ .
40. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה  $(1,-1,2)$  ומקביל למישור המשולש בעל הקדקודים  $C(3,0,1), B(-1,2,3), A(1,0,0)$ .
41. חשב את המרחק מהנקודה  $A(3,9,1)$  למישור  $x - 2y + 2z - 5 = 0$ .
42. על הציר  $x$  מצא נקודה הנמצאת במרחק שווה מן המישורים  $2x + 2y - z = 1, 12x - 16y + 15z + 1 = 0$ .
43. מצא את משוואת המישור המקביל למישור  $3x + 6y - 2z = 7$  שמרחקו מהנקודה  $(1,-1,2)$  שווה ל-3.
44. חשב נפח הפירמידה החסומה על ידי המישורים  $z = 0, y = 0, x = 0, 3x - 6y + 2z = 12$ .
45. מצא את קוסינוס הזווית החדה בין המישורים  $x + 2y + 2z + 1 = 0, 15x + 12y - 16z = 1$ .
46. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  המישורים  $2x + \alpha y + z = 1, 2x + y + z = 3$  מאונכים,      ב. מקבילים ?
47. חשב את המרחק בין שני מישורים מקבילים:  $4x + 6y - 12z + 16 = 0, 2x + 3y - 6z + 5 = 0$ .
48. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות  $(3,5,2), (2,1,3)$   
 א. הנקודות  $(2,1,4)$  ומקביל לוקטור  $\vec{p} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$   
 ג. הנקודה  $(3,1,-2)$  ומאונך למישור  $x + y - 2z = 2$
49. מצא את משוואת המישור העובר דרך שני הישרים המקבילים  
 $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}, \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-2}$
50. מצא זווית בין ישרים  $\left. \begin{matrix} 2x - y + 3z = 1 \\ 5x + 4y - z = 7 \end{matrix} \right\}^{-1} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+5}{3}$
51. חשב את המרחק מנקודה  $(1,-1,3)$  לישר  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$
52. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה  $(1,1,1)$  ומאונך לוקטורים:  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = (3,1,2)$
53. מצא את נקודת החיתוך של הישר  $\frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$  והמישור  $2x + 3y - z = 5$ .
54. מצא היטל של הנקודה  $A(2,-3,4)$  על המישור  $x + 2y + 2z = 13$ .
55. כתוב את המשוואה הקנונית של הישר הנתון על ידי שני המישורים:  
 $x - y + 3z = 1, 3x + 2y - z - 3 = 0$
56. מצא נקודה סימטרית לנקודה  $P(2,-3,4)$  ביחס למישור  $3x + 4y + 5z + 36 = 0$ .
57. מצא נקודה סימטרית לנקודה  $P(4,3,10)$  ביחס לישר  $z = 3 + 5t, y = 2 + 4t, x = 1 + 2t$ .
58. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(0,1,-1)$  המקביל לקו החיתוך של המישורים:  
 $3x + y - 2z = 2, 2x - y + 3z + 7 = 0$
59. הוכח כי הישרים  $x = 2t - 3, y = 3t - 2, z = 6 - 4t$  ו-  $x = t + 5, y = -4t - 1, z = t - 4$  נחתכים. מצא את נקודת החיתוך.
60. יהי  $D$  המישור המוגדר ע"י המשוואה  $7x + 3y + 2z = 1$ . מצא את הנקודה  $Q$  במישור  $D$  הקרובה ביותר לנקודה  $P(1,0,-1)$ ; הרכב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות  $P$  ו-  $Q$ ; וחשב המרחק  $PQ$ .

61. נתונות 4 נקודות במרחב :  $A(0,2,4); B(-2,6,-2); C(2,-4,8); D(10,2,0)$ . הרכב את משוואת הישר  $AK$  כאשר  $K$  זה היטלה של  $D$  על המישור  $ABC$ .

**גיאומטריה אנליטית במישור**

62. צייר את הגרפים של הקווים הבאים :

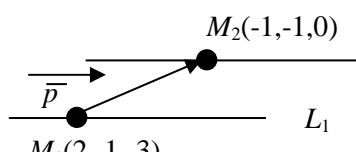
$a. x^2 + y^2 = 5$        $b. x^2 + y^2 = 4x$        $c. x^2 + y^2 = 6y$        $d. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$   
 $e. \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$        $f. 4x^2 - 9y^2 = 36$        $g. 4x^2 - 9y^2 = -36$        $h. y = 2(x-1)^2 - 3$   
 $i. x = -0.5(y+1)^2 + 4$        $j. 2y + x^2 - 4x = 6$

**תשובות :**

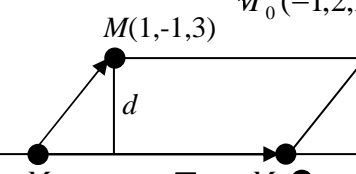
1)  $4x - 3y + z = 23$       2) א.  $y = 2$     ב.  $4x + 3z = 1$     ג.  $4x + 5y + 3z = 11$   
 3) א.  $x + y - 2z - 3 = 0$       ב.  $x - 2y - z - 3 = 0$   
 4)  $x + 4y - 2z + 7 = 0$       5) 6      6)  $(2,0,0), (11/43,0,0)$   
 7)  $3x + 6y - 2z = 14, 3x + 6y - 2z + 28 = 0$       8) 8      9)  $7/75$       10)  $\begin{cases} \text{א. } \alpha = -5 \\ \text{ב. } \alpha = 1 \end{cases}$   
 11)  $3/7$     12) א.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$     ב.  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 5t \\ z = 4 + 8t \end{cases}$     ג.  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$     13)  $3x - 2y + 3z + 1 = 0$   
 14)  $\cos \alpha = \frac{34}{\sqrt{8106}}$     15)  $\sqrt{\frac{69}{14}}$     16)  $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$     17)  $(-3,3,-2)$     18)  $(3,-1,6)$   
 19)  $x = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$     20)  $(-4,-11,-6)$     21)  $(2,9,6)$     22)  $x = \frac{y-1}{-13} = \frac{z+1}{-5}$     23)  $(3,7,-6)$   
 24)  $Q\left(\frac{17}{31}, \frac{-6}{31}, \frac{-35}{31}\right), (PQ): \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, PQ = \frac{4}{\sqrt{62}} = \frac{2\sqrt{62}}{31}$     25)  $(AK): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

**פתרונות :**

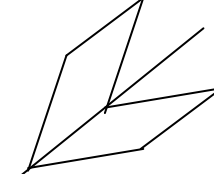
4.  $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,8,-4) \Rightarrow \overline{N} = (1,4,-2), 1(x-1) + 4(y+1) - 2(z-2) = 0$   
 11.  $d = \frac{|-8+0-0+5|}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$  ניקח נקודה על מישור  $4x + 6y - 12z + 16 = 0$ , למשל  $(-4,0,0)$ . לכן

13.  
$$\vec{n} \times \overline{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (9, -6, 9) \Rightarrow N = (3, -2, 3)$$
 
$$L_1 \quad 3(x-2) - 2(y+1) + 3(z+3) = 0$$

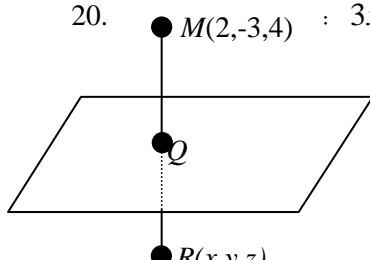
14.  $\vec{p}_{l_1} = (2, 1, 3), \quad \vec{p}_{l_2} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-11, 17, 13), \quad \cos \alpha = \frac{\vec{p}_{l_1} \cdot \vec{p}_{l_2}}{|\vec{p}_{l_1}| \cdot |\vec{p}_{l_2}|} = \frac{34}{\sqrt{8106}}$

15.  
$$M_0(-1, 2, 1), \quad \overline{M_0 M_1} = \vec{p} = (2, -1, 3), \quad \overline{M_0 M} = (2, -3, 2)$$
 
$$\overline{M_0 M} \times \vec{p} = (-7, -2, 4), \quad d = \frac{|\overline{M_0 M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \sqrt{\frac{69}{14}}$$

18. 
$$\begin{cases} (t+2) + 2(2t-3) + 2(2t+4) = 13 \\ t = 1 \\ x = 3, y = -1, z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 13 \\ x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{p} = (1, 2, 2) \quad (\text{א})$$

19.  
$$\vec{p} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -10, -5) \quad (\text{א}) \text{ הוקטור בכיוון הישר}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \quad (\text{ב}) \text{ נקודה על הישר אם } \begin{cases} x = 0 \\ -y + 3z = 1 : x = 0 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (0, 2, 1) \text{ . לכן משוואת הישר היא}$$

20.  
$$M(2, -3, 4) : 3x + 4y + 5z = -36 \text{ למישור } MR \text{ הישר } (MR) \quad x = 3t + 2, y = 4t - 3, z = 5t + 4$$
 
$$Q(-1, -7, -1), t = -1 : \text{ (ב) נקי' חיתוך הישר והמשור}$$
 
$$MQ = RQ \Rightarrow \frac{x+2}{2} = -1, \frac{y-3}{2} = -7, \frac{z+4}{2} = -1 \Rightarrow R(-4, -11, -6) \quad (\text{ג})$$