

תרגול 4
פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי

I. מצא את הגרף של פונקציות וקטוריות ועבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה להצגה קרטזית

1. $\vec{r}(t) = t\vec{i} - 4t\vec{j}, -\infty < t < \infty$
 2. $\vec{r}(t) = 5 \cos t \vec{i} + 5 \sin t \vec{j}, 0 \leq t < 2\pi$
 3. $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j}, 0 \leq t < 2\pi$
 4. $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (3t^2 + 1)\vec{j}, -\infty < t < \infty$
 5. $\vec{r}(t) = (3 + 2 \cos t)\vec{i} + (2 + 4 \sin t)\vec{j}, 0 \leq t < 2\pi$
 6. $\vec{r}(t) = \cos^3 t \vec{i} + \sin^3 t \vec{j}, 0 \leq t < 2\pi$
- מצא את הגרף של פונקציות וקטוריות הבאות :
7. $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}, a > 0$
 8. $\vec{r}(t) = 4 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + t\vec{k}, -\infty < t < \infty$

II. מצא את ההצגה הוקטורית של עקומות הבאות :

9. $y = \sin x, -\infty < x < +\infty$
10. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
11. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
12. $64x^2 + 9y^2 = 1$
13. $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x^2 = z \\ y^2 = x \end{cases}$

15. גזור את פונקציה $\vec{r}(t) = 0.5 \tan^4 2t \vec{i} - t \cos 3t \vec{j} + \ln 4t \vec{k}$

16. מצא משוואת המשיק לעקומות :

1.16 $\vec{r}(t) = (te^{-t} + 3)\vec{i} + \sqrt{4 + 5t}\vec{j} + (\arctan 2t)\vec{k}$ בנקודה המתאימה ל- $t = 0$.

2.16 $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + t\vec{k}$ בנקודה $M(2,0,0)$.

3.16 $\begin{cases} z = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$ בנקודה $M(1,1,1)$.

17. על עקומה $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + 5\vec{k}$ מצא נקודה שבה ישר המשיק מקביל למישור $x - 6y + 4z = 3$.

18. עבור $\vec{r}(t) = \cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j} + t^2 \vec{k}$ מצא את $\frac{d|\vec{r}|}{dt}, \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|, \frac{d\vec{r}}{dt}$.

19. נקודה נעה לאורך העקומה $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + 4t \vec{k}$. חשב את המהירות $\vec{r}'(t)$ ואת התאוצה $\vec{r}''(t)$ בזמן $t = \pi/2$.

20. מצא את הזווית בין ווקטורי המהירות $\vec{r}'(t)$ והתאוצה $\vec{r}''(t)$ בזמן $t = 0$ אם

$$\vec{r}(t) = \ln(t^2 + 1)\vec{i} + \arctan t \vec{j} + \sqrt{t^2 + 1}\vec{k}$$

21. חלקיק נע לפי חוק התנועה

$$\vec{r}(t) = (\cos \alpha \cos \omega t)\vec{i} + (\sin \alpha \cos \omega t)\vec{j} + (\sin \omega t)\vec{k} \quad (\omega > 0)$$

מצא את מהירות $\vec{v}(t)$, תאוצה $\vec{w}(t)$ וערכים שלהן $(|\vec{w}(t)|, |\vec{v}(t)|)$.

22. מהירות $\vec{v}(t)$ של חלקיק משתנה לפי החוק $\vec{v}(t) = (2, -1, -10t)$. ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $\vec{r}(0) = (0, 0, 100)$. מצא את משוואת תנועה $\vec{r} = \vec{r}(t)$ של החלקיק.

23. תאוצה של חלקיק תלויה בזמן לפי נוסחה $\vec{w}(t) = 18 \cos 3t \vec{i} - 18 \sin 3t \vec{j}$. רדיוס-וקטור תחילתי ומהירות התחלתית של חלקיק הם $\vec{r}(0) = (2, 0, 1)$ & $\vec{v}(0) = (0, 2, 4)$. מצא משוואת התנועה של החלקיק.

24. נתון רדיוס-וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \vec{k}$

($\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$) מהירות התחלתית). מצא את מהירות, תאוצה וערכים שלהן.

25. חשב וקטור המשיק יחידה ב t_0 הנתון.

1.25 $\vec{r}(t) = (\sin t, e^t, t^2), t_0 = 0$

2.25 $r(t) = (2 \ln(t+1), t^2, 0.5t^2), t_0 = 1$

26. חלקיק נע לפי חוק התנועה $\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$ ($R > 0, \omega > 0$)

מצא את מהירות $\vec{v}(t)$, תאוצה $\vec{w}(t)$ ערכים שלהן $(|\vec{w}(t)|, |\vec{v}(t)|)$, וקטור המשיק יחידה, וקטור תאוצה יחידה

27. מצא את הנגזרת של

a) $\vec{r}(t) \cdot \vec{p}(t)$ b) $f(t) \vec{r}(t)$ c) $\vec{r}^2(t)$ d) $\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$ e) $(\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) \cdot \vec{h}(t)$

IV. קואורדינטות קוטביות

שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות במערכת קוטבית :

1. $r = 2$ 2. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq 4\pi$ 3. $r = 2(1 + \cos \theta)$ 4. $r = 1/\theta, 0.5\pi \leq \theta \leq 3\pi$

5. $r = 2/\cos \theta$ 6. $r = 2/\sin \theta$ 7. $r = 2 \sin \theta$ 8. $r = 2 \cos \theta$ 9. $r = 2(1 - \cos \theta)$

רשום בקואורדינטות קוטביות המשוואות הבאות:

10. $x = 3$ 11. $x^2 + y^2 = 4x$ 12. $y = 5$ 13. $x^2 + y^2 = 3y$ 14. $x + 2y = 5$ 15. $x^2 + y^2 = 9$

16. $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ 17. $y^2 = 4x$ 18. $(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$

רשום בקואורדינטות קרטזיות את המשוואות הבאות:

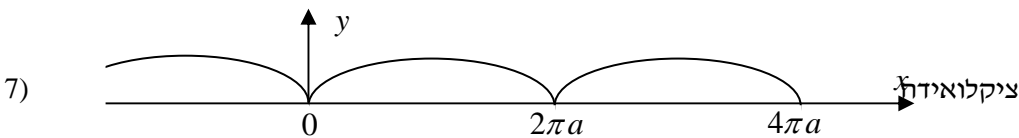
19. $r = 2 \cos \theta$ 20. $r = 3/\sin \theta$ 21. $\theta = \pi/2$ 22. $\sin \theta = r \cos^2 \theta$ 23. $r^2 \cos 2\theta = \tan \theta$

תשובות

I.

1) $y = -4x$ 2) $x^2 + y^2 = 25$ 3) $9x^2 + 4y^2 = 36$ 4) $y = 3x^2 + 1$

5) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ 6) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



8) קצה של $\vec{r}(t)$ נע לאורך ספירלה הנמצאת מעל גליל אליפטי $9x^2 + 16y^2 = 144$

II.

9) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sin t \vec{j}, -\infty < t < \infty$ 10) $\vec{r}(t) = 8 \cos^3 t \vec{i} + 8 \sin^3 t \vec{j}, 0 \leq t < 2\pi$

11) $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (1-t)^2 \vec{j}, 0 \leq t \leq 1$ 12) $\vec{r}(t) = \frac{\cos t}{8} \vec{i} + \frac{\sin t}{3} \vec{j}, 0 \leq t < 2\pi$

13) $\vec{r}(t) = (-1+2t)\vec{i} + (-3+3t)\vec{j} + t\vec{k}, -\infty < t < \infty$ 14) $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + t^4 \vec{k}, -\infty < t < \infty$

III.

$$15) \vec{r}'(t) = \frac{4 \sin^3 2t}{\cos^5 2t} \vec{i} + (3t \sin 3t - \cos 3t) \vec{j} + \frac{\vec{k}}{t}$$

$$16.1) \vec{r} = (3, 2, 0) + (1, 1.25, 2)t \quad 16.2) \begin{cases} x = 2 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \quad 16.3) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad 17) M(9, 3, 5)$$

$$18) \vec{r}'(t) = -2 \sin 2t \vec{i} + 2 \cos 2t \vec{j} + 2t \vec{k}, \quad |\vec{r}'(t)| = 2\sqrt{1+t^2}, \quad (|\vec{r}(t)|)' = \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$19) \vec{r}'(\pi/2) = -2\vec{i} + 4\vec{k} \quad \vec{r}''(\pi/2) = -3\vec{j} \quad 20) \angle(\vec{r}'(0), \vec{r}''(0)) = \pi/2$$

$$21) \vec{v}(t) = \omega(\cos \alpha \sin \omega t, \sin \alpha \sin \omega t, \cos \omega t), |\vec{v}(t)| = \omega$$

$$\vec{w}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t), |\vec{w}(t)| = \omega^2$$

$$22) \vec{r}(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad 23) \vec{r}(t) = (4 - 2 \cos 3t, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1)$$

$$24) \vec{v}(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \vec{w}(t) = (0, 0, -g), |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 - 2v_{03}gt + g^2t^2}, |\vec{w}(t)| = g$$

$$25.1) \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \quad 25.2) \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}}$$

$$26) \vec{v}(t) = R\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t), \vec{w}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t), |\vec{v}(t)| = R\omega, |\vec{w}(t)| = R\omega^2,$$

$$\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = (-\sin \omega t, \cos \omega t), \quad \frac{\vec{w}(t)}{|\vec{w}(t)|} = -(\cos \omega t, \sin \omega t)$$

$$27. a) (\vec{r}(t) \cdot \vec{p}(t))' = \vec{r}'(t) \cdot \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{p}'(t) \quad b) (f(t) \vec{r}(t))' = f'(t) \vec{r}(t) + f(t) \vec{r}'(t)$$

$$c) (\vec{r}^2(t))' = 2\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) \quad d) (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t))' = \vec{r}'(t) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{p}'(t)$$

$$e) ((\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) \cdot \vec{h}(t))' =$$

$$(\vec{r}'(t) \times \vec{p}(t)) \cdot \vec{h}(t) + (\vec{r}(t) \times \vec{p}'(t)) \cdot \vec{h}(t) + (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) \cdot \vec{h}'(t)$$

IV.

$$10) r = 3/\cos \theta \quad 11) r = 4 \cos \theta \quad 12) r = 5/\sin \theta$$

$$13) r = 3 \sin \theta \quad 14) r = 5/(\cos \theta + 2 \sin \theta) \quad 15) r = 3$$

$$16) r^2 = 2 \sin 2\theta \quad 17) r = 4 \cos \theta / \sin^2 \theta \quad 18) r^2 = 8 \cos 2\theta$$

$$19) x^2 + y^2 = 2x \quad 20) y = 3 \quad 21) x = 0 \quad (y > 0)$$

$$22) y = x^2 \quad 23) x^2 - y^2 = y/x$$