

תרגול 5

פונקציות של מספר משתנים

I נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 y + \frac{y^2}{x}$ . חשב :

- a)  $f(1, -1)$       b)  $f\left(\frac{1}{3}, 2\right)$       c)  $f(y, x)$       d)  $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$       e)  $f(-x, -y)$

II מצא את התחום ההגדרה של פונקציות :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $v(x, y) = x + \sqrt{y}$                              | 10. $u(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$                             |
| 2. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$           | 11. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2}$                                       |
| 3. $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$                      | 12. $g(x, y) = \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + x^2 y \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ |
| 4. $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$            | 13. $h(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$   |
| 5. $k(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$     | 14. $v(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}$                                     |
| 6. $v(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - x) / (2x - x^2 - y^2)}$ | 15. $g(x, y) = \arcsin(x / y^2) + \arcsin(1 - y)$                           |
| 7. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$                  | 16. $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$                                      |
| 8. $g(x, y) = \ln(-x - y)$                               | 17. $v(x, y, z) = \ln(xyz)$   |
| 9. $v(x, y) = \ln(-x + y)$                               | 18. $g(x, y, z) = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$                                |

III בנה את קווי הרמה של הפונקציות (או קווי הגובה) :

- |                          |                                     |                                 |
|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $g(x, y) = x + y$     | 4. $h(x, y) = (x + y)^2$            | 7. $v(x, y) = \sqrt{x y}$       |
| 2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ | 5. $g(x, y) = \frac{y}{x}$          | 8. $h(x, y) = e^{2x/(x^2+y^2)}$ |
| 3. $v(x, y) = x^2 - y^2$ | 6. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$ | 9. $f(x, y) = 1 -  x  -  y $    |

IV תאר את משטחי הרמה של הפונקציות (או משטחי הגובה) :

- |                                   |                                   |  |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1. $f(x, y, z) = x + y + z$       | 3. $v(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ | 5. $h(x, y, z) = \tan(x^2 + y^2 - 2z^2)$ |
| 2. $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ | 4. $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ | 6. $f(x, y, z) = 7^{2x+3y-z}$            |

V נגזרות חלקיות

חשב את הנגזרת מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. $u(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^3 + 5$ | 2. $f(x, y) = \frac{x}{y^2} + e^{2xy}$  | 3. $u(x, y) = x \sin(2x + 3y)$                     |
| 4. $v(x, y) = x^y$                      | 5. $u(x, y) = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$   | 6. $f(x, y) = \ln(x + y^2) + 5^x y^2$              |
| 7. $f(x, y) = (1 + xy)^y$               | 8. $v(x, y) = \ln(x + \ln y)$   | 9. $u(x, y, z) = x^{y/z}$                          |
| 10. $g(x, y) = e^{-x/y} + 3$            | 11. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$   | 12. $v(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ |
| 13. $h(x, y) = (1 + \log_y x)^3$        | 14. $g(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right), \frac{\partial g}{\partial x}(1, 2) = ? \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 2) = ?$ |  |

VI נגזרות חלקיות של פונקציה מורכבת, כלל השרשרת

1. נתון  $U(t) = u(f(t), g(t), h(t))$ ,  $h(t) = t^3$ ,  $g(t) = e^{-t}$ ,  $f(t) = \sin 4t$ ,  $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$   
חשב  $U'(t)$ .
2. נתון  $V(t) = v(f(t), g(t))$ ,  $g(t) = \ln(t^2 + \ln 5t)$ ,  $f(t) = te^{2t}$ ,  $v(x, y) = x/y$   
חשב  $V'(t)$ .
3. נתון  $Z(x, y) = z(f(x, y), g(x, y))$ ,  $g(x, y) = y/x$ ,  $f(x, y) = x/y$ ,  $z(u, v) = u^2 \ln v$   
חשב  $\partial Z / \partial y$ ,  $\partial Z / \partial x$ .
4.  $U(x) = u(x, v(x))$ ,  $v(x) = x^3$ ,  $u(x, y) = \ln(e^x + e^y)$   
חשב  $dU/dx$ .
5.  $Z(t) = z(t, f(t), v(t))$ ,  $v(t) = \sqrt{t}$ ,  $f(t) = 1/t$ ,  $z(t, x, y) = \tan(3t + 2x^2 - y)$   
חשב  $dZ/dt$ ,  $\partial z / \partial t$ .
6.  $Z(u, v) = z(f(u, v), g(u, v))$ ,  $g(u, v) = u \cos v$ ,  $f(u, v) = u \sin v$ ,  $z(x, y) = \arctan(x/y)$   
חשב  $\partial Z / \partial u$ ,  $\partial Z / \partial v$ .
7.  $U(t) = u(f(t), g(t))$ ,  $g(t) = t \sin t$ ,  $f(t) = t \cos t$ ,  $u(x, y) = e^{xy^2}$   
חשב  $U'(\pi/2)$ .
8. הוכח כי אם  $z(x, y) = f(x^2 - y^2)$  גזירה אזי מתקיים השוויון  $y(\partial z / \partial x) + x(\partial z / \partial y) = 0$ .
9. הוכח כי אם  $z(x, y) = e^y f(ye^{x^2/(2y^2)})$  גזירה אזי מתקיים השוויון  
$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$
10. הוכח כי אם  $u(x, y, z) = f(x^2 z - yz)$  גזירה אזי מתקיים השוויון  
$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
11. הוכח כי אם  $u(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$  גזירה אזי מתקיים השוויון  
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

תשובות

I. a) 0      b)  $\frac{110}{9}$       c)  $\frac{xy^3 + x^2}{y}$       d)  $\frac{x^3 + y}{x^2 y^2}$       e)  $-x^2 y - \frac{y^2}{x}$

II. 1.  $y \geq 0$     2.  $|x| \leq 1, |y| \geq 1$     3.  $x^2 + y^2 \leq 1$     4.  $x^2 + y^2 > 1$     5.  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

6.  $x \leq x^2 + y^2 < 2x$     7.  $|x^2 + y| \leq 1$     8.  $x + y < 0$     9.  $y > x$     10.  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

11.  $|x| \leq y^2, y \neq 0$     12.  $x^2 + y^2 = 4$     13.  $|y| \leq |x|, x \neq 0$

14.  $\{y \geq 0, y \geq -2x, x^2 + y^2 \neq 0\} \cup \{y \leq 0, y \leq -2x, x^2 + y^2 \neq 0\}$

15.  $y^2 = -x, y^2 = x$  המשולש העקום החסום ע"י הפרבולות והישר  $y = 2$  (לא כולל את הראשית)

16.  $2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k+1), k = 0, 1, 2, \dots$

17.  $\{x > 0, y > 0, z > 0\} \cup \{x > 0, y < 0, z < 0\} \cup \{x < 0, y > 0, z < 0\} \cup \{x < 0, y < 0, z > 0\}$

18.  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 < -1\}$   
 החלק הפנימי של ההיפרבולויד דו-יריעתי  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

III. 1.  $x + y = c$  ישרים מקבילים      2.  $c \geq 0, x^2 + y^2 = c$  מעגלים

3.  $x^2 - y^2 = c$      $y = \pm x$  משפחת היפרבולות שוות שוקיים בעלות אסימפטוטות משותפות:  $y = \pm x$  וזוג הישרים  $y = \pm x$  עצמו

4.  $c \geq 0, x + y = \sqrt{c}$  ישרים מקבילים      5. אלומת ישרים  $y = cx$  ללא הראשית

6.  $\frac{x^2}{1/c} + \frac{y^2}{1/(2c)} = 1, c > 0$  משפחת אליפסות

7.  $\{c = 0 : y = 0 \text{ or } x = 0\} \& \{c \neq 0 : xy = c^2\}$  משפחת היפרבולות

8.  $x^2 + y^2 = c_1 x$  אלומת מעגלים העוברים דרך הראשית (ללא הראשית)

9.  $|x| + |y| = c_1$  ( $c_1 \geq 1$ ) ריבועים

IV. 1.  $x + y + z = c$  משפחת מישורים מקבילים

2.  $c > 0, x^2 + y^2 + z^2 = c$  נקודה  $(0,0,0)$  עבור  $c = 0$ , ומשפחת ספירות

3.  $x^2 + y^2 - z^2 = c$  משפחת היפרבולוידים דו-יריעתיים עבור  $c < 0$   
 משפחת היפרבולוידים חד-יריעתיים עבור  $c > 0$   
 חרוט עבור  $c = 0$

4.  $x^2 - y^2 - z^2 = c$  משפחת היפרבולוידים דו-יריעתיים עבור  $c > 0$   
 משפחת היפרבולוידים חד-יריעתיים עבור  $c < 0$   
 חרוט עבור  $c = 0$

5.  $x^2 + y^2 - 2z^2 = c, c \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

6.  $2x + 3y - z = c_1$  משפחת מישורים מקבילים

V.

$$1. \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^3, \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 12x^2y^2 \quad 2. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + 2ye^{2xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x}{y^3} + 2xe^{2xy}$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(2x + 3y) + 2x \cos(2x + 3y), \frac{\partial u}{\partial y} = 3x \cos(2x + 3y)$$

$$4. \frac{\partial v}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial v}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$5. \frac{\partial u}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)$$

$$6. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2} + 5^{xy^2} y^2 \ln 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2} + 5^{xy^2} 2xy \ln 5$$

$$7. \frac{\partial f}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}, \ln f = y \ln(1 + xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \left( \ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right) (1 + xy)^y$$

$$8. \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x + \ln y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{(x + \ln y)y}$$

$$10. \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{e^{-x/y}}{y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{xe^{-x/y}}{y^2}$$

$$11. \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$12. \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)}$$

$$13. \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{3(1 + \log_y x)^2}{x \ln y}, \quad \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{3(1 + \log_y x)^2 \ln x}{y \ln^2 y}$$

VI

$$1. dU / dt = 4(2x + z) \cos 4t - 2ye^{-t} + 3xt^2 = 4(2 \sin 4t + t^3) \cos 4t - 2e^{-2t} + 3t^2 \sin 4t$$

$$2. \frac{dV}{dt} = \frac{e^{2t}(1 + 2t)}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{2t + 1/t}{t^2 + \ln 5t} = \dots$$

$$3. \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{2u \ln v}{y} - \frac{u^2}{v} \frac{y}{x^2} = \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{2xu \ln v}{y^2} + \frac{u^2}{v} \frac{1}{x} = \dots$$

$$4. \frac{dU}{dx} = \frac{e^x + 3e^y x^2}{e^x + e^y} = \dots$$

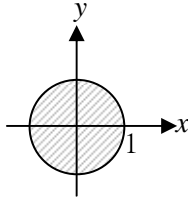
$$5. \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{3}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} = \dots, \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{3 - 4x/t^2 - 0.5/\sqrt{t}}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} = \dots$$

$$6. \partial Z / \partial u = (y \sin v - x \cos v) / (x^2 + y^2) = \dots$$

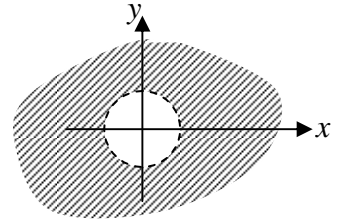
$$7. \frac{dU}{dt}(\pi/2) = -\pi^3/8$$

I.

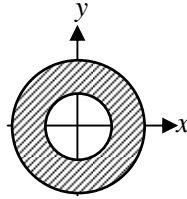
3)  $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$



4)  $x^2 + y^2 > 1$

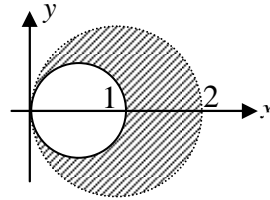


5) א.  $\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

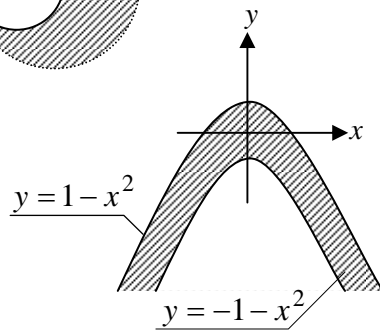


ב.  $\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  אין פתרון

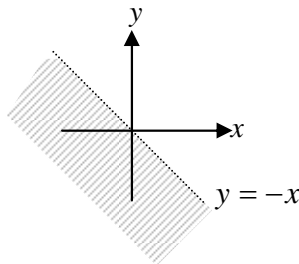
6) א.  $\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 - x \geq 0 \\ 2x - x^2 - y^2 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \leq x^2 + y^2 < 2x$



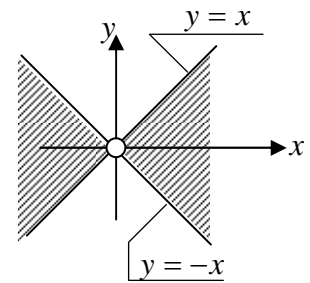
ב.  $\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 - x \leq 0 \\ 2x - x^2 - y^2 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  אין פתרון



7)  $-1 \leq x^2 + y \leq 1$



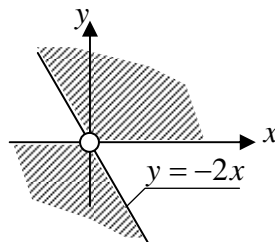
8)  $x + y < 0$



13)  $\left| \frac{y}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |y| \leq |x| \\ x \neq 0 \end{cases}$

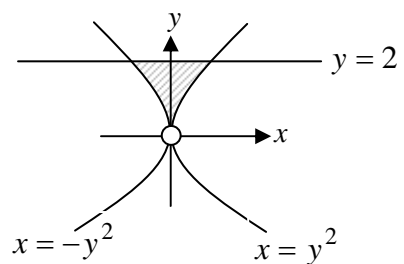
14)  $-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \Rightarrow$

א.  $\left. \begin{matrix} x+y > 0 \\ -x-y \leq x \leq x+y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x \end{cases}$

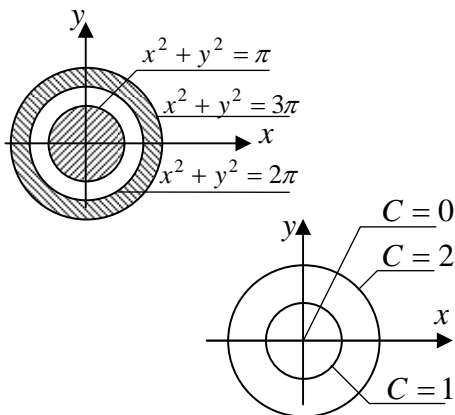


ב.  $\left. \begin{matrix} x+y < 0 \\ x \geq x+y \\ x \leq -x-y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y < 0 \\ y \leq 0 \\ y \leq -2x \end{cases}$

15)  $\left. \begin{matrix} -1 \leq 1-y \leq 1 \\ -1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -y^2 \leq x \leq y^2 \\ y \neq 0 \end{cases}$

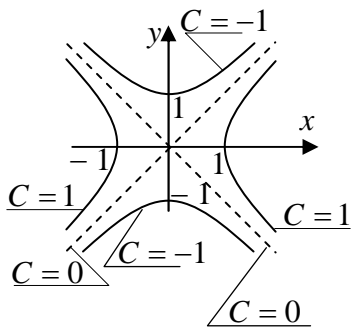


16)  $\sin(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq 2\pi k + \pi$   
 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

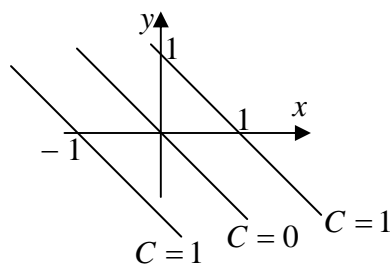


III.

2)  $x^2 + y^2 = C, C \geq 0$

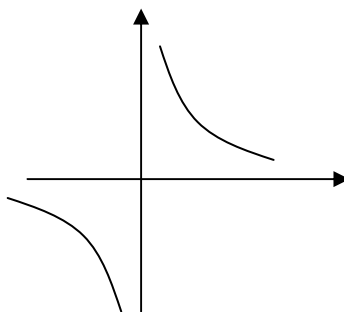


3)  $x^2 - y^2 = C$



4)  $(x+y)^2 = C, C \geq 0 \Rightarrow x+y = \pm\sqrt{C}$

7)  $xy = C, C \geq 0$



8)  $e^{2x/(x^2+y^2)} = C \Rightarrow \begin{cases} C = e^{C_1}, C_1 = 2x/(x^2+y^2) \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{2}{C_1} x \\ C_1 = \ln C \\ C \neq 1, x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} C = 1 \\ x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

