חדו"א 2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2014. תרגיל בית מס' 6, נוסף.

(1) עבור פונקציות הבאות בדקו: רציפות, נגזרות חלקיות, רציפות של נגזרות חלקיות, גזירות (=דיפרנציאביליות). (בכל הנקודות)

i. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ii. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

iii. $f(x,y)=\begin{cases} \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ iv. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

v. $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)sin(\frac{1}{x^2+y^2}),\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ vi. $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

(2) תהי $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)^{\alpha}ln(x^2+y^2):\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0:\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$. מצאו את כל הערכים של α שעבורם $f(x,y)$ רציפה. מצאו את כל הערכים של α שעבורם $f(x,y)$ גזירה (=דיפרנציאבילית).

(3) (א) הוכיחו כי פונקציה $f(x,y)=arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$ מקיימת: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ עבור כל (x,y) בתחום הגדרתה.

(ב) נניח ש $f(t)$ גזירה . הוכיחו כי פונקציה $z(x,y)=e^y f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ מקיימת $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$ בתחום הגדרתה.

(4) תהי $f(x,y)=\begin{cases} sin(x)sin(y)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}:\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0:\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

האם $f(x,y)$ גזירה בנקודה $(0,0)$? האם $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}|_{(0,0)}$?

(5) (א) חשבו בקירוב (הקירוב עד לסדר ראשון) $\sqrt{5e^{0.02}+2.03^2}$.

(ב) פתחו לפולינום טיילור עד סדר 2 בנקודה $(0,0)$: i. $ln(1+x)ln(1+y)$, ii. $arctan(\frac{x+y}{1+xy})$, iii. $\frac{sin(x)-sin(y)}{e^x+e^y}$

(6) (א) נתון שלכל נקודה $x\in\mathbb{R}$ למשוואה $x=3y-2sin(y)$ קיים פתרון (לפחות אחד). הוכיחו כי המשוואה מגדירה את פונקציה גזירה. חשבו $y'(x)$, $y''(x)$. מצאו תחומי עליה/ירידה ונקודות קיצון (אם קיימות) של $y(x)$.

(ב) נניח שמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה שתי פונקציות גזירות $y(x)$, $x(y)$. הוכיחו כי $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$

(ג) נניח שמשוואה $F(x,y,z)=0$ מגדירה שלוש פונקציות גזירות $y(x,z)$, $z(x,y)$, $x(y,z)$. הוכיחו כי $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=-1$.

(7) מצאו את כל הישרים המשיקים לעקום $x^2-y^2=1$ שעוברים דרך נקודה $(2,0)$.

(8) מצאו את כל הנקודות שבהן העקומות משיקות (כלומר יש להן אותו משיק):
i. $\{y=cos(x)\}\subset\mathbb{R}^2$ ו $\{y=cos(\frac{x}{3})\}$ ii. $\{y=(x-1)^2\}\subset\mathbb{R}^2$ ו $\{(x-1)^2+(y-1)^2=1\}$

(9) מצאו את כל הנקודות של המשטחים הבאים שבהן המישור המשיק מאונך לציר $\hat{y}$. i. $\{z^2-y^2+x^2=10\}$, ii. $\{sin(x)+sin(y)+sin(z)=1\}$.