תרגול 10
אנטגרל קווי

I. חשב את האינטגרלים הקוויים מהסוג הראשון:

1. $\int_C (x+y)\,dl$, C – משולש בעל הקדקודים $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$

2. $\int_C y^2\,dl$, C – קשת הציקלואידה $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$, $a>0$.

3. $\int_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, C - קטע קו ישר OA , $O(0,0)$, $A(1,2)$

4. $\int_C (x+y)\,dl$ כאשר $C=\{(x,y):\ |x|+|y|=1\}$

5. $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,dl$ כאשר C : $\vec r(t)=2\cos t\,\vec i+2\sin t\,\vec j+t\,\vec k$, $0\le t\le 2\pi$ (קו הבורג)

6. $\int_C (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,dl$ כאשר C : $\vec r(t)=t\cos t\,\vec i+t\sin t\,\vec j+t\,\vec k$, $0\le t\le 2\pi$

II. חשב את האנטגרלים הקוויים מהסוג השני:

1. $\int_{OA} -y\,dx+x\,dy$, $O(0,0)$, $A(1,2)$ כאשר: א) המסילה OA היא קטע קו ישר

ב) המסילה OA היא קטע פרבולה $y=2x^2$

ג) המסילה OA היא קו שבור OBA , $B(1,0)$

2. $\int_{AB} -y\,dx+x\,dy$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$ כאשר AB: $y=\sqrt{4-x^2}$

3. $\int_{AB} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, כאשר AB: $y=1-|1-x|$, $(x_A=0,\ x_B=2,\ 0\le x\le 2)$

4. $\int_{AB} (x^2+1)\,dx+(2x+y)\,dy+(x+y-z)\,dz$ לאורך הישר מנקודה $A(1,-1,0)$ לנקודה $B(3,-2,3)$

5. $\int_C xy^2dx+yz^2dy-x^2z\,dz$, C - ישר מנקודה $O(0,0,0)$ לנקודה $B(-2,4,5)$

6. $\int_C (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2\,dz$, C – העקומה $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $(0\le t\le 1)$,

כיוון חיובי – כיוון עלית הפרמטר.

7. $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, C העקומה $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $(0\le t\le 2\pi)$, $a>0$, $b>0$

כיוון חיובי – כיוון עלית הפרמטר.

III. חשב את אורכי הקווים הבאים (כל הפרמטרים חיוביים)

1. C: $x^2+y^2=R^2$

2. C: $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$, $(0\le t\le 2\pi)$ - קרדיאואידה

3. C: $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ מהנקודה $O(0,0,0)$ עד לנקודה $B(3,3,2)$

4. C: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $(0\le t\le 2\pi)$

5. C: $x=\sqrt t\cos t$, $y=\sqrt t\sin t$, $z=t$, $(1\le t\le 4)$

IV .

1 . מצא את המסה של קשת קו הבורג $x=4\cos t, y=4\sin t, z=3t, \ (0\le t\le 2\pi)$ אם הצפיפות בכל נקודה שווה לריבוע המרחק של הנקודה מהראשית.

2 . מצא את המסה של העקום $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, \ z=e^t, \ (0\le t\le 1)$ אם הצפיפות היא קבוע ושווה ל- $\sqrt{3}$.

3 . מצא את המסה של העקום $y=x^2+1, \ (0\le x\le 1)$ אם הצפיפות היא שווה $f(x,y)=x$

4 . מצא את המסה של הפרבולה $y^2=4x, \ (0\le x\le 1)$ אם הצפיפות היא שווה $f(x,y)=|y|$

V . מצא את עבודה של הכוח המשתנה $\vec{F}$ הפועל לאורך העקומה C מנקודה D לנקודה B

1 . $\vec{F}=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2},z^2\right)$; $C: x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t$; $D(2,0,0), B(2,0,6\pi)$

2 . $\vec{F}=(x+y,-x)$; $C: x=a\cos t, y=a\sin t$; $(0\le t\le 2\pi)$ בכיוון החיובי

3 . $\vec{F}=(4x^6, xy)$; $C: y=x^3$; $D(0,0), B(1,1)$

4 . $\vec{F}=(y-z, xz, x^2)$; $D(0,2,-1), B(2,1,0)$; C - קטע קו ישר DB

VI . חשב את האנטגרלים הבאים לאחר שתוכיח כי הביטוי בתוך האינטגרל הוא דיפרנציאל שלם :

1. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$ 2. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy$ 3. $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$ 4. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$

5. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz$ 6. $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz$

7 . $\int_{(A)}^{(B)} \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, נקודה A נמצאת על כדור $x^2+y^2+z^2=a^2$,
נקודה B נמצאת על כדור $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$
ומסלול האינטגרציה אינו עובר דרך ראשית הצירים.

VII . חשב בעזרת <u>נוסחת גרין</u>

1 . $\oint_{OmAnO} (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$ OmA - קטע הפרבולה $y=x^2$,
AnO - קטע הפרבולה $x=y^2$

2 . $\oint_C (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$ C היא שפת המשולש ABD בכיוון החיובי
$A(1,1), B(3,2), D(2,5)$

3 . $\oint_C xy^2dy-x^2y\,dx$ C – המעגל $x^2+y^2=a^2$ בכיוון החיובי

4 . $\oint_C (x+y)dx-(x-y)\,dy$ C – האליפסה $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ בכיוון החיובי

5 . תוך שימוש בנוסחת גרין מצא הערך של האינטגרל $I=\oint_C\left(\dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{y}{x}\,dx+\dfrac{2}{y}\arctan\dfrac{x}{y}\,dy\right)$
כאשר (C) היא עקומה סגורה המורכבת מקשתות של שני מעגלים $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, (y>0)$
וקטעים של הישרים $y=\sqrt{3}\,x, y=x, (y>0)$ ביניהם.

VIII . חשב את הפוטנציאל z , כאשר

$1.\ dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$

$2.\ dz=(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$

$3.\ dz=(e^{xy}+5)(xdy+ydx)$ $\qquad 4.\ dz=(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx$

$5.\ du=\dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$ $\qquad 6.\ du=\dfrac{dx}{z}-\dfrac{3dy}{z}+\dfrac{3y-x+z^3}{z^2}dz$

IX. חשב את השטח של התחום החסום ע״י העקומים הבאים :

1. האליפסה $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad$ 2. $x=y^2,\ x=1$

3. הציקלוידה $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $a>0,\ (0\le t\le 2\pi)$ וציר x

X. הוכח ש- $\vec F$ הוא שדה משמר ומצא את פוטנציאל שלו

1. $\vec F=e^{x-y}(1+x+y)\ \vec i+e^{x-y}(1-x-y)\ \vec j$, בכל המישור

2. $\vec F=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}\ \vec i+\dfrac{y}{1+x^2+y^2}\ \vec j$, בכל המישור

3. $\vec F=\dfrac{-y^2}{(x-y)^2}\ \vec i+\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\ \vec j$, בתחום $\overline{D}:(x+5)^2+y^2\le 9$

4. $\vec F=2\sin(y^2+4)\ \vec i+(4xy\cos(y^2+4)+6e^{3y})\ \vec j+6z\ \vec k$ בכל המרחב

5. $\vec F=|\vec r|\,\vec r$, $\vec r=x\,\vec i+y\,\vec j+z\,\vec k$ בכל המרחב

XI. חשב $\oint_\Gamma \vec F\cdot d\vec r$ (צירקולציה של $\vec F$) כאשר

1. $\vec F=(x+3y+2z)\ \vec i+(2x+z)\ \vec j+(x-y)\ \vec k$, Γ הוא קו שבור $ACBA$
$A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,1)$

2. $\vec F=y\ \vec i-x\ \vec j$, $\Gamma: x=a\cos t,\ y=a\sin t$ מעגל בכיוון חיובי .

3. $\vec F=(2y+5z)\vec i+(2x-3z)\ \vec j+(5x-3y)\vec k$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2+z^2=4,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

4. $\vec F=\left(e^{2y}+\dfrac{2}{2x+15}\right)\vec i+(2x\,e^{2y}+\cos 7y-7y\sin 7y)\ \vec j$, Γ הוא קו שבור
$ODCBAO$ $\quad O(0,0), A(1,2), B(-1,3), C(-2,-1), D(5,-6)$

5. $\vec F=\dfrac{-y\,\vec i+x\,\vec j}{x^2+y^2}$, Γ הוא מעגל בכיוון חיובי :

$a)\ x^2+y^2=1$ $\qquad b)\ (x-2)^2+y^2=1$

תשובות

I $\quad 1)\ 1+\sqrt2 \quad 2)\ \dfrac{256}{15}a^3 \quad 3)\ \ln\dfrac{\sqrt5+3}{2} \quad 4)\ 0 \quad 5)\ \dfrac{8\pi\sqrt5}{3}(3+\pi^2) \quad 6)\ \dfrac{2\sqrt2}{3}\left[(1+2\pi^2)^{3/2}-1\right]$

II $\quad$ 1.א) 0 $\quad$ 1.ב) $\dfrac{2}{3}$ $\quad$ 1.ג) 2 $\quad 2)\ -4\pi \quad 3)\ \dfrac{4}{3} \quad 4)\ \dfrac{31}{6} \quad 5)\ 91 \quad 6)\ \dfrac{1}{35} \quad 7)\ -\pi a^2$

III $\quad 1)\ 2\pi R \quad 2)\ 16a \quad 3)\ 5 \quad 4)\ 2\pi\sqrt{a^2+b^2} \quad 5)\ \dfrac{17}{3}$

IV $1)\ 40\pi(4+3\pi^2)$ $2)\ 3(e-1)$ $3)\ \dfrac{5^{3/2}-1}{12}$ $4)\ \dfrac{8}{3}(\sqrt{8}-1)$

V $1)\ 72\pi^3+2\pi$ $2)\ -2\pi a^2$ $3)\ 1$ $4)\ 17/3$

VI. $1)\ 8$ $2)\ 12$ $3)\ 4$ $4)\ -2$ $5)\ -53\dfrac{7}{12}$ $6)\ 0$ $7)\ b-a$

VII $1)\ \dfrac{1}{30}$ $2)\ -46\dfrac{2}{3}$ $3)\ \dfrac{\pi a^4}{2}$ $4)\ -2ab\pi$ $5)\ \dfrac{\pi}{12}\ln 2$

VIII $1)\ z=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{y^3}{3}+x^2y-xy^2+C$ $2)\ z=x^2+x+2y-3xy^2+C$

$3)\ z=e^{xy}+5xy+C$ $4)\ z=y-3x-y\sin 2x+C$

$5)\ u=C+\ln|x+y+z|$ $6)\ u=\dfrac{x-3y}{z}+\dfrac{z^2}{2}+C$

IX $1)\ \pi ab$ $2)\ 4/3$ $3)\ 3\pi a^2$

X. $1)\ u=e^{x-y}(x+y)+C$ $2)\ u=0.5\ln(1+x^2+y^2)+C$ $3)\ u=\dfrac{xy}{x-y}+C$

$4)\ u=2x\sin(y^2+4)+2e^{3y}+3z^2+C$ $5)\ \dfrac{1}{3}|\vec{r}|^3+C$

XI. $1)\ -5$ $2)\ -2\pi a^2$ $3)\ 0$ $4)\ 0$ $5a)\ 2\pi$ $5b)\ 0$

פתרונות

I

$$2)\ dl=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\ dt=a\sqrt{2-2\cos t}\ dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt\ ,$$

$$\left(1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha\right)$$

$$\int_C y^2\,dl=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,2a\sin\frac{t}{2}dt=a^3\int_0^{2\pi}4\sin^4\frac{t}{2}\,2\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=-2\cdot 8a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2 d\cos\frac{t}{2}\quad=-16a^3\int_1^{-1}(1-u^2)^2du=$$

$$=-16a^3\int_1^{-1}(1-2u^2+u^4)du=\dots$$

$$3)\ OA: y=2x\ ,\ dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx=\sqrt{5}\,dx$$

$$\int_C\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\sqrt{5}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\sqrt{5}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\ln|\sqrt{5}\,x+\sqrt{5x^2+4}\ |\Big|_0^1=$$

$$=\ln|\sqrt{5}+3|-\ln 2$$

II

3) $y = 1 - |1-x| = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ $\qquad \int\limits_{AB} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy =$

$$= \int\limits_{\substack{AD \\ y=x \\ dy=dx \\ 0\le x\le 1}} + \int\limits_{\substack{DB \\ y=2-x \\ dy=-dx \\ 1\le x\le 2}} = \int_0^1 2x^2dx + 0\,dx + \int_1^2 (x^2+(2-x)^2)dx + (x^2-(2-x)^2)(-dx)$$

5) $OB: \begin{cases} x = -2t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1,$

$$\int\limits_C x\,y^2dx + yz^2dy - x^2z\,dz = \int_0^1 -2t\,16t^2(-2dt) + 4t\,25t^2\,4dt - 4t^2\,5t\,5dt$$

III

1) $x^2+y^2=R^2 \qquad :C \quad \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \; (0 \le t \le 2\pi),$

$$d\,l = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = Rdt, \qquad L = \int\limits_C dl = \int_0^{2\pi} Rdt = 2\pi R$$

IV

3) $dl = \sqrt{1+4x^2}\,dx, \quad m = \int\limits_C f(x,y)dl = \int\limits_C xdl = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,d\left(1+4x^2\right) =$

$$= \left.\frac{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}{12}\right|_0^1$$

V

1) $D(2,0,0), B(2,0,6\pi)$; $C: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t$; $\quad \overline{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z^2\right)$

$D(2,0,0) \Rightarrow 2 = 2\cos t, 0 = 2\sin t, 0 = 3t \Rightarrow t_D = 0$

$B(2,0,6\pi) \Rightarrow 2 = 2\cos t, 0 = 2\sin t, 6\pi = 3t \Rightarrow t_B = 2\pi$

$$\text{A} = \int\limits_{AB} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + z^2dz =$$

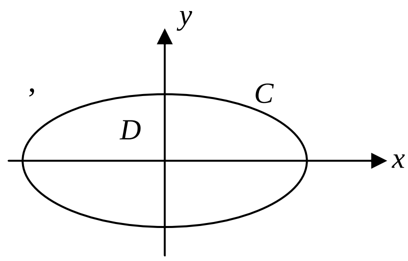
$$\int_0^{2\pi} \frac{-2\sin t}{4}(-2\sin t dt) + \frac{2\cos t}{4}(2\cos t dt) + 9t^2(3dt) = \int_0^{2\pi} dt + 27t^2dt = (9t^3+t)\Big|_0^{2\pi}$$

VI

$$3)\ P = x + y\ ,\ Q = x - y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{\substack{y=1\\0\le x\le 2\\dy=0}} + \int_{\substack{x=2\\1\le y\le 3\\dx=0}} = \int_0^2 (x+1)dx + \int_1^3 (2-y)dy = \ldots$$

VII



$$4)\ \oint_C Pdx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy\ ,\quad P = x + y,\ Q = -x + y\quad ,$$

$$\oint_C (x+y)dx - (x-y)\,dy = \iint_D (-1-1)\,dx\,dy = -2\iint_D dx\,dy$$

VIII

$$1)\ dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

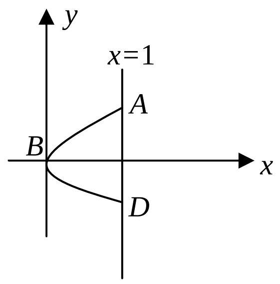
$$z'_x = x^2 + 2xy - y^2 \Rightarrow z = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + g(y) \Rightarrow z'_y = x^2 - 2xy + g'(y)$$

$$z'_y = x^2 - 2xy - y^2 \Rightarrow g'(y) = -y^2 \Rightarrow$$

$$g(y) = -\frac{y^3}{3} + C,\qquad z = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$$

IX

$$2)\ S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\left[\int_{\substack{ABD:x=y^2\\dx=2ydy}} + \int_{\substack{DA:x=1\\dx=0}}\right] =$$



$$= \frac{1}{2}\left[\int_1^{-1} y^2 dy - y2ydy + \int_{-1}^{1} dy\right]$$