תרגול 11
משטחים

I נתון משטח בצורה וקטורית. רשום משוואת המשטח בקאורדינטות קרטזיות. קבע איזו צורה גיאומטרית מייצגת המשוואה.

1. $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u^2)$ 2. $\vec{r}(u,v)=(v\cos u, v\sin u, \sqrt{25-v^2})$

3. $\vec{r}(u,v)=v\,\vec{i}+u\,\vec{j}+\sqrt{u^2+v^2}\,\vec{k}$

4. $\vec{r}(\theta,\varphi)=(3\cos\theta\sin\varphi, 3\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\varphi)$

5. $\vec{r}(\theta,z)=(2\sqrt{z}\cos\theta)\,\vec{i}+(3\sqrt{z}\sin\theta)\,\vec{j}+z\,\vec{k}$

II.

1. מצא את משוואת מישור המשיק למשטח $\vec{r}(u,v)=(u+v, u-v, uv)$ בנקודה $(v=1, u=2)$
2. מצא את משוואת הנורמל למשטח $\vec{r}(u,v)=(u+v, u^2+v^2, u^3+v^3)$ בנקודה $(v=1, u=2)$
3. מצא את משוואת הנורמל למשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ בנקודה $(3,4,-7)$
4. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+y^2+z^2=4z$ בנקודה $(0,2,2)$

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

III. חשב את האינטגרלים הבאים :

1. $\iint_S 3z\,ds$ כאשר S הוא חלק של הפרבולויד $z=2-x^2-y^2$, $z\ge 0$
2. $\iint_S z(x+y)\,ds$ כאשר S הוא חלק של הגליל $z=\sqrt{4-x^2}$, $0\le y\le 5$
3. $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,ds$ כאשר S הוא חלק של החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מעל העיגול $x^2+y^2\le 2x$

IV.

1. מצא את שטח הפנים של המשטחים הבאים :

א. חלק מהמישור $x+2y+3z=6$ בין המישורים $z=0, y=0, x=0$

ב. חלק של הפרבולויד $z=2-x^2-y^2$, $z\ge 0$

2. חשב את המסה של חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=9$, $(z\ge 0)$ בעל צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה עד המישור xy

אינטגרל משטחי מסוג שני

V. חשב $\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy$

1. $P=x, Q=y, R=z$ ו- S הצד החיצוני של חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=16$, $(z\ge 0)$
2. $P=y, Q=-x, R=0$ ו-S הצד החיצוני של החרוט $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 3$
3. $P=y-x, Q=x+y, R=y$ ו- S הצד העליון של $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, $x+y+z=1$
4. $P=y-z, Q=z-x, R=x-y$ ו-S הצד החיצוני של החרוט $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 4$

VI. חשב את השטף $\left(\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy\right)$ של השדה הוקטורי $\vec{F}=(P,Q,R)$ דרך המשטח S

1. $\vec{F}=4x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ ו- S הצד העליון של $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, $2x+2y+z=4$
2. $\vec{F}=(y-z)\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(x-y-1)\,\vec{k}$ דרך המשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מ- $z=0$ עד $z=1$ כלפי חוץ

VII. חשב דיברגנט של שדה וקטורי :

1. $\vec{F}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ 2. $\vec{F}=xyz\,\vec{i}+e^x y^2 z\,\vec{j}+\vec{k}$

3. $\vec{F}=x^2\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ בנקודה $M(1,1,-2)$

4. $\vec{F}=x\,\vec{i}+3\,\vec{j}-z^2\,\vec{k}$ בנקודה $M(0,1,-1)$

VIII. חשב רוטור של שדה וקטורי :

1. $\vec{F}=z^2\,\vec{i}+x^2\,\vec{j}+y^2\,\vec{k}$ בנקודה $M(1,-1,2)$

2. $\vec{F}=(2xz^3+6y)\,\vec{i}+(6x-2yz)\,\vec{j}+(3x^2z^2-y^2)\,\vec{k}$

3. $\vec{F}=y^2z^2\,\vec{i}+x^2z^2\,\vec{j}+x^2y^2\,\vec{k}$ בנקודה $M(1,2,3)$

4. $\vec{F}=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xz\,\vec{k}$

IX. הוכח עבור שדות וקטוריים כלליים $\vec{F}(x,y,z)$, $\vec{G}(x,y,z)$ ופונקציה סקלרית $f(x,y,z)$ מקיימים :

1. $\operatorname{div}(\vec{F}\pm\vec{G})=\operatorname{div}\vec{F}\pm\operatorname{div}\vec{G}$ 2. $\operatorname{rot}(\vec{F}\pm\vec{G})=\operatorname{rot}\vec{F}\pm\operatorname{rot}\vec{G}$

3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})=0$ 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}f)=0$

משפט גאוס

X. חשב את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F}$ דרך המשטח S

1. $\vec{F}=x^2\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ כאשר S הוא שפת קוביה : $\{0\le z\le 1, 0\le y\le 1, 0\le x\le 1\}$

2. $\vec{F}=3x\,\vec{i}+4y\,\vec{j}-z\,\vec{k}$ כאשר S הוא שפה של תחום : $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

3. $\vec{F}=3xy^2\,\vec{i}-(y^3+x)\,\vec{j}+2z\,\vec{k}$ דרך המשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מ- $z=0$ עד $z=1$ כלפי חוץ

4. $\vec{F}=xy\,\vec{i}+2y\,\vec{j}-z\,\vec{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=4$

5. $\vec{F}=(y-z)\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(x-y-1)\vec{k}$ דרך המשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$
מ- $z=0$ עד $z=1$ כלפי חוץ

6. מצא בעזרת נוסחת גאוס השטף של שדה וקטורי $\vec{F}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ דרך צד
חיצוני של משטח סגור S המוגדר ע״י המשוואות : $z=0$; $(0\le z\le 1)$; $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$

משפט סטוקס $\iint\limits_S(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds=\oint\limits_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$

XI. חשב את צירקולציה של $\vec{F}$ כאשר

1. $\vec{F}=(x+3y+2z)\,\vec{i}+(2x+z)\,\vec{j}+(x-y)\,\vec{k}$, Γ הוא קו שבור $ACBA$
$A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,1)$

2. $\oint\limits_\Gamma(3x+2y)dx+(z-y^2)dy+(x+1)dz$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0\right\}$,

3. $\vec{F}=y\,\vec{i}+x^2\,\vec{j}-z\,\vec{k}$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2=4,\quad z=1\right\}$

4. $\vec{F}=(y,-x,z)$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2+z^2=8, z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

5. $\vec{F}=(x-y)\,\vec{i}+(x-z)\,\vec{j}+(y-x)\,\vec{k}$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2=1,\quad x+z=1\right\}$

6. $\vec{F}=(1-x^2y^3,1,z)$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2=a^2, z=0\right\}$

תשובות

I.

$1)\ z=x^2+y^2 \quad 2) z=\sqrt{25-x^2-y^2} \quad 3)\ z=\sqrt{x^2+y^2} \quad 4)\ x^2+y^2+z^2=9 \quad 5) z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

פרבולויד חצי כדור חצי חרוט כדור פרבולויד

II.

$1. 3x-y-2z=4 \qquad 2.\begin{cases} x=3+12t \\ y=5-9t \\ z=9+2t \end{cases} \qquad 3.\begin{cases} x=3+17t \\ y=4+11t \\ z=-7+5t \end{cases} \qquad 4.\ \ y=2$

III. $1) 11.1\pi \qquad 2) 100 \qquad 3) 3\sqrt{2}\,\pi$

IV. 1.א) $3\sqrt{14}$ 1.ב) $13\pi/3$ $2)\ 27\pi$

V. $1) 128\pi \qquad 2)\ 0 \qquad 3)\ 0.5 \qquad 4)\ 0$

VI. $1) 16 \qquad 2)\ \pi$

VII. $1)\ 3 \qquad 2)\ yz+2e^x yz \qquad 3)\ 0 \qquad 4)\ 3$

VIII. $1)\ (-2,4,2) \qquad 2)\ (0,0,0) \qquad 3)\ (-2,16,-18) \qquad 4)\ (-y,-z,-x)$

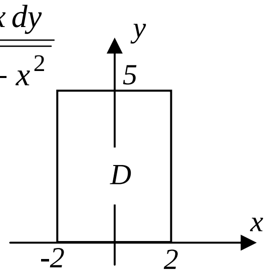
X. $1)\ 3 \qquad 2)\ \pi \qquad 3)\ -\frac{4}{3}\pi \qquad 4)\ \frac{32}{3}\pi \qquad 5)\ \pi \qquad 6)\ \pi$

XI. $1)-5 \quad 2)-4\pi a^2/\sqrt{3} \quad 3)-4\pi \quad 4)-8\pi \quad 5)\ 4\pi \quad 6) \pi a^6/8$

פתרונות

III.

$$2)\ z=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx\,dy=\frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2}}$$



$$\iint_S z(x+y)\,ds=\iint_D \sqrt{4-x^2}\,(x+y)\frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2}}=2\int_{-2}^{2}dx\int_0^5 (x+y)\ dy$$

$$3)\ z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,ds=\iint_D (x^2+y^2+x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy=2\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)\ dx\,dy=$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\,(rdr)=8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^4\ d\theta=8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4}\,d\theta=\ldots$$

IV.

1.א) $x+2y+3z=6 \Rightarrow z=\dfrac{6-x-2y}{3} \Rightarrow ds=\sqrt{1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}}\,dx\,dy=\dfrac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy$

$$S=\iint_S ds=\iint_D \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}dx$$

$$2)\; m=\iint_S z\,ds=\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2-y^2}+\frac{y^2}{9-x^2-y^2}}\,dx\,dy=3\iint_D dx\,dy$$

V

$$3.\; \left.\begin{array}{r} f(x,y,z)=0\Rightarrow \vec{N}=(f'_x\,,\,f'_y\,,\,f'_z)\,,\; x+y+z=1\Rightarrow \vec{N}=(1,1,1)\Rightarrow \vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ \vec{F}=(P,Q,R)=(y-x)\,\vec{i}+(x+y)\,\vec{j}+y\,\vec{k} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}\,y,$$

$$x+y+z=1\Rightarrow z=1-x-y\Rightarrow ds=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dx\,dy=\sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_S \sqrt{3}\,y\,ds=\iint_D \sqrt{3}\,y\sqrt{3}\,dx\,dy=3\int_0^1 y dy\int_0^{1-y} dx=\ldots$$

$$\text{VII}.\;4)\,\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}\,,\quad \text{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},\;\; \text{div}(x\,\vec{i}+3\,\vec{j}-z^2\,\vec{k})=1+0-2z$$

$$\text{VIII}.4)\,\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}\,,\quad \text{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=(R'_y-Q'_z\,,P'_z-R'_x\,,Q'_x-P'_y)$$

$$\text{rot}(xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xz\,\vec{k})=(0-y,0-z,0-x)$$

$$\text{IX}.\;1)\,\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}\,,\quad \vec{G}=M\,\vec{i}+N\,\vec{j}+K\,\vec{k}\,,$$

$$\text{div}(\vec{F}+\vec{G})=\text{div}(P+M,Q+N,R+K)=(P+M)'_x+(Q+N)'_y+(R+K)'_z=$$

$$=(P'_x+Q'_y+R'_z)+(M'_x+N'_y+K'_z)=\text{div}\,\vec{F}+\text{div}\vec{G}$$

$$\text{X}.3)\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\oiint_{S\cup(z=1)}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds-\iint_{z=1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\oiint_{S\cup(z=1)}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V \text{div}\,\vec{F}\,dv=\iiint_V (3y^2-3y^2+2)\,dv=2\iiint_V dv=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot1\cdot1=\frac{2}{3}\pi$$

$$z=1\Rightarrow\vec{n}=(0,0,1)\,,\;\vec{F}\cdot\vec{n}=2z\,,\;ds=dx\,dy\,,\;\iint_{z=1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{z=1}2z\,ds=\iint_{x^2+y^2\le1}2\,dx\,dy=2\pi$$

XI .

<u>דרך 1</u>

$$1)\ \vec{F} = (x+3y+2z)\ \vec{i}\ + (2x+z)\ \vec{j}\ + (x-y)\,\vec{k}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} (x+3y+2z)\,dx + (2x+z)\,dy + (x-y)dz = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

<u>דרך 2</u>

$$\text{rot}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (-2,1,-1)$$

$$ABC: 3x+2y+6z=6 \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{7}(3,2,6)\ ,\ \vec{n}\cdot \text{rot}\vec{F} = -\frac{10}{7}$$

$$3x+2y+6z=6 \Rightarrow ds = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}\,dx\,dy = \frac{7}{6}\,dx\,dy$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S} \vec{n}\cdot \text{rot}\vec{F}\ ds = \iint_{S} -\frac{10}{7}\,ds = \iint_{D} -\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{6}\,dx\,dy = -\frac{5}{3}\iint_{D} dx\,dy = -\frac{5}{3}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}$$