תרגול 6

ניגזרת חלקית מסדר גבוה

I חשב את הנגזרות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

1. $u = x^3 + 3xy^2 - 4x^2y^5 + 1$
2. $p = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $u = xy + yz + zx$
4. $u = x^m y^n$
5. $g = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
6. $z = e^{x^2 y}$
7. $u = 2x^3 y + x^2 z^3$
8. $k = e^x \ln y + 3x + 2y - 5$

פונקציה סתומה

II

נניח שמשוואות הבאות מגדירות את הפונקציה סתומה $y(x)$. מצא את הניגזרות שלה :

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. $y' = ?\ ,\ y'' = ?$
2. $y - 2\sin y = x$. $y' = ?\ ,\ y'' = ?$
3. $xy^2 + x^5 = 2x$. $y' = ?$
4. $x^y = y^x$. $y' = ?$
5. בדוק שהמשוואה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ מגדירה פונקציה סתומה $z = f(x, y)$ בסביבת הנקודה $(0,0,a)$. מצא z'_x , z'_y , z''_{xx} , z''_{yy} , z''_{xy} .
6. נניח שמשוואה $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ מגדירה פונקציה סתומה $z = g(x, y)$.
הוכח שהפונקציה $z = g(x, y)$ מקיימת את המשוואה $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.
7. בדוק שהמשוואה $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ מגדירה פונקציה סתומה $z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,1)$. חשב $z'_x(1,1)$, $z'_y(1,1)$.

דיפרנציאל

III חשב את הדיפרנציאל של הפונקציה

1. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$
2. $u = x^2y + y^2z + x^2z$
3. $p = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
4. $h = x^3y^2 + 1$
5. $u = z/(x^2 + y^2)$
6. $g = x^2y^4 + xy^2 - 3x^2z + z^2y$

IV חשב בקרוב

1. $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$
2. $\sin 32^{\circ} \cdot \tan 40^{\circ}$
3. $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$
4. $\arctan\frac{1.01}{0.98}$
5. $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$

שדה סקלרי. גרדיאנט . נגזרת מכוונת

V

1. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z = x^2 - xy + y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.
2. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u = xy^2z^3$ בנקודה $M(3,2,1)$ בכיוון $\vec{a} = (2,2,1)$.
3. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z = x^2 - y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה-X .
4. הוכח שהנגזרת המכוונת של $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ בנקודה $M(x, y, z)$ כלשהי בכיוון מ-M לראשית שווה ל- $(-2u/r)$, כאשר $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u = xe^{|\vec{r}|}$, $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ בנקודה $(0,1,0)$.

6. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ בנקודה (1,1,1).
7. מצא נקודות שבהן הגרדיאנט של השדה הסקלרי $z=\sin(x+y)$ שווה ל- $\vec{i}+\vec{j}$.
8. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=xyz$ וכיוון שלו בנקודה $M(2,1,1)$.
9. א. מצא את כיוון בו קצב ההישתנות של השדה הסקלרי $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ בנקודה $M(1,2,1)$ הוא מקסימלי
ב. מצא את הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של u בנקודה $M(1,2,1)$.
10. חשב את הנגזרת של הפונקציה $z=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית α עם הציר ה-X. באיזה כיוון הנגזרת זו מקבלת א) ערך גדול ביותר ? ב) ערך קטן ביותר ? ג) הערך 0 ?
11. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u=xyz$ בנקודה $M(1,1,1)$ בכיוון $\vec{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. מהו גודל הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה זו ?
12. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M_0(-4,3)$ בכיוון הנורמל לקו הגובה העובר דרך M_0.
13. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=3x^2+5y^2+z^2$ העובר דרך הנקודה $M_0(1,-1,\ 2)$ ונגזרת מכוונת של הפונקציה $u(x,y,z)$ בנקודה M_0 בכיוון הנורמל למשטח רמה (α).
14. בדוק שהמשוואה $x+yz+z^3=6$ מגדירה פונקציה סתומה $z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(3,2,1)$.
א חשב $z'_x(3,2)$, $z'_y(3,2)$.
ב חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z(x,y)$ בנקודה $(3,2)$ בכיוון $\vec{n}=(0.6,-0.8)$.
ג מצא $z''_{yy}(x,y)$ וחשב $z''_{yy}(3,2)$.

משוואת מישור משיק ונורמל למשטח

VI

כתוב את משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $x_0=1,\ y_0=2$ 2) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2}$, $x_0=3,\ y_0=1$

כתוב את משוואת הנורמל לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

3) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$, $x_0=1,\ y_0=1$ 4) $f(x,y)=\dfrac{y+\ln x}{2}$, $x_0=1,\ y_0=1$

כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=0$ בנקודה M :

5) $x^2+y^2+z^2=169$, $M(3,4,12)$ 6) $2^{x/z}+2^{y/z}=8$, $M(2,2,1)$

7. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+2y^2+3z^2=21$ המקביל למישור $x+4y+6z=0$.
8. הוכח כי המשטחים הבאים

$$(S_1):\quad x^2+y^2+z^2=a\,x$$
$$(S_2):\quad x^2+y^2+z^2=b\,y$$
$$(S_3):\quad x^2+y^2+z^2=c\,z$$

כאשר $a,b,c\neq 0$ מאונכים זה לזה בכל נקודות חיתוך שלהם (הערה: שני משטחים מאונכים אם נורמלים שלהם מאונכים).

9. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ העובר דרך הנקודה $M_0(2,4,10)$. כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח רמה (α) בנקודה M_0.

VII תרגילים נוספים

1. לפונקציה $f(x,y,z)$ ידוע ש– $f'_x(1,1,2)=3$, $f'_y(1,1,2)=1$, $f'_z(1,1,2)=4$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $F(t)=f(\cos t,(t+1)^2,2e^t)$. חשב $F'(0)$.

2. לפונקציה $f(x,y)$ ידוע ש– $f'_x(3,1)=4$, $f'_y(3,1)=-1$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $H(z)=f\left(3z^2, 2\sin\frac{\pi z}{6}\right)$. חשב $H'(1)$.

3. לפונקציה $g(x,y)$ ידוע ש– $g'_x(1,1)=2/3$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $G(v)=g\left(e^v,\cos v\right)$.
   א. חשב $G'(0)$.
   ב. ידוע גם ש– $g''_{xx}(1,1)=2/9$, $g'_y(1,1)=4/3$. חשב $G''(0)$.

<u>תשובות</u>

I.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x-8y^5$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-80x^2y^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6y-40xy^4$

2. $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=1$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=m(m-1)x^{m-2}y^n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=mnx^{m-1}y^{n-1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)x^my^{n-2}$

6 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2ye^{x^2y}(2x^2y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xe^{x^2y}(1+x^2y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4e^{x^2y}$

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12xy+2z^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6x^2z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6x^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=6xz^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$

8. $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}=e^x\ln y$, $\frac{\partial^2 k}{\partial x\partial y}=\frac{e^x}{y}$, $\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}$

II.

1. $y'=-\frac{x+y}{x-y}$, $y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$ 2. $y'=\frac{1}{1-2\cos y}$, $y''=-\frac{2\sin y}{(1-2\cos y)^3}$

3. $y'=-\frac{y^2+5x^4-2}{2xy}$

4. $y'=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}=-\frac{y}{x}\,\frac{yx^y-xy^x\ln y}{yx^y\ln x-xy^x}=-\frac{y}{x}\,\frac{y-x\ln y}{y\ln x-x}=\frac{y^2}{x^2}\,\frac{1-\ln x}{1-\ln y}$

$$x^y=y^x \quad\Rightarrow\quad y\ln x=x\ln y \qquad , \qquad (y\neq e\Rightarrow x\neq e)$$

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{z^3}$

7. $z'_y(1,1)=-0.75$, $z'_x(1,1)=0.25$

III

1. $dz=(2xy^4-3x^2y^3+4x^3y^2)dx+(4x^2y^3-3x^3y^2+2x^4y)dy$

2. $du=(2xy+2xz)dx+(x^2+2yz)dy+(x^2+y^2)dz$ 3. $dp=\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

4. $dh=3x^2y^2dx+2x^3ydy$ 5. $du=\dfrac{-2xzdx-2yzdy}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{dz}{x^2+y^2}$

6. $dg=(2xy^4+y^2-6xz)dx+(4x^2y^3+2xy+z^2)dy+(2zy-3x^2)dz$

IV

1) 108.972 2) 0.443 $\{z=\sin x\tan y,\ dx=2\pi/180,\ d\,y=-5\pi/180\}$

3) 2.95 4) $(\pi/4)+0.015=0.800$ 5) 3.037

V

1) 1.4 2) $22\frac{2}{3}$ 3) $1-\sqrt{3}$ 5) $e\,\bar{i}$ 6) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 7) $y=-x+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$

8) $\operatorname{grad}u\big|_{(2,1,1)}=(1,2,2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

9) $\operatorname{grad}u\big|_{(1,2,1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$, $\max\frac{\partial u}{\partial l}(M)=\frac{\sqrt6}{3}$

10) $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$ א. $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ב. $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ ג. $\alpha_1=\frac{3\pi}{4},\ \alpha_2=\frac{7\pi}{4}$

11) $\frac{\partial u}{\partial l}(M)=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$, $|\operatorname{grad}u\|_M=\sqrt3$ 12) 0.4

13) $3x^2+5y^2+z^2=12$, $grad\,u\,(1,-1,2)=(6,-10,4)$, $|\,grad\,u\,(1,-1,2)|=2\sqrt{38}$

14) $z'_x(3,2)=-\frac{1}{5},\ z'_y(3,2)=-\frac{1}{5},\ \frac{\partial z}{\partial\vec n}(3,2)=\frac{1}{25},\ z''_{yy}=2yz/(y+3z^2)^3,\ z''_{yy}(3,2)=\frac{4}{125}$

VI

1) $2x+4y-z=5$ 2) $3x-y-z=4$ 3) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

4) $x-1=y-1=\dfrac{z-0.5}{-2}$ 5) $3x+4y+12z=169$ 6) $x+y-4z=0$

7) $x+4y+6z=21,\ x+4y+6z=-21$

9) $2x+4y-z=10$

VII 1) $F'(0)=10$ 2) $H'(1)=24-\dfrac{\pi\sqrt3}{6}$ 3) $G'(0)=\dfrac{2}{3}$, $G''(0)=-\dfrac{4}{9}$