חדו"א2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2014. תרגיל בית מס' 7 ,נוסף.

(1) נניח ש $f(x,y,z)$ גזירה והומוגנית מסדר n (כלומר, מקיימת: $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ עבור כל $t\in\mathbb{R}$). הוכיחו כי $x\partial_x f+y\partial_y f+z\partial_z f=nf$.

(2) נניח ש $z(x,y)$ גזירה ומקיימת את המשוואה $x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$. הוכיחו כי $(x^2-y^2-z^2)\partial_x z+2xy\partial_y z=2xz$.

(3) (א) תהי (x_0,y_0) נקודה על העקום $\{xy=1\}$, $x>0$, $y>0$. יהי l הישר המשיק לעקום בנקודה (x_0,y_0). חשבו את שטח המשולש החסום ע"י l וצירי קואורדינטות. (הוכיחו כי השטח לא תלוי בבחירת הנקודה.)

(ב) תהי (x_0,y_0,z_0) נקודה של משטח $\{x^a+y^a+z^a=1\}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. יהי P המישור המשיק בנקודה. חשבו את נפח הפירמידה חסומה ע"י המישורים P, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

(ג) תהי (x_0,y_0,z_0) נקודה של המשטח $\{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. יהי P המישור המשיק בנקודה. נתבונן בנקודות החיתוך של P עם צירי הקואורדינטות: $(a_x,0,0)$, $(0,a_y,0)$, $(0,0,a_z)$. הוכיחו כי $a_x+a_y+a_z$ הנו קבוע (לא תלוי בבחירה של (x_0,y_0,z_0)).

(ד) נתבונן במשטחים $x^2+y^2+z^2=r_0^2$, $y=xtan(\phi_0)$, $x^2+y^2=z^2tan(\theta_0)$. (כאן r_0,ϕ_0,θ_0 הם קבועים.) הוכח שכל שני המשטחים ניצבים בכל נקודות החיתוך.

(ה) מצאו את כל הישרים המשיקים גם לעקום $x-y^2=a$, $a>0$ וגם לעקום $x+y^2=-b$, $b>0$.

(4) תהי $f(x,y)=g(x^2+y^2)$, כאשר $g(t)$ גזירה. הוכיחו $y\partial_x f-x\partial_y f=0$.

(5) (א) מצאו נגזרת מכוונת של $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M=(1,1)$ בכיוון $((cos(\alpha),sin(\alpha))$. באיזה כיוון הנגזרת המכוונת מקבלת את הערך הגדול/הקטן ביותר?

(ב) מצאו את כל הנקודות (x,y) שבהן הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=x^3+y^3$ בכיוון $(2,1)$ מקבלת את הערך הגדול ביותר.

(ג) מצאו את הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M=(x_0,y_0)$ בכיוון שניצב לקו רמה של $f(x,y)$,
העובר דרך הנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

(6) (א) הוכיחו כי לפונצקיה $f(x,y)=(1+e^y)cos(x)-ye^y$ יש אינסוף נקודות מקסימום (מקומי) ואינסוף נקודות אוכף, אך אין אף נקודת מינימום.

(ב) תהי $f(x,y)$ גזירה. נניח שעבור כל ישר העובר דרך $(0,0)$, הנקודה היא מינימום מקומי של פונצקיה לאורך הישר. האם זה מבטיח ש היא נקודת מינימום מקומי של $f(x,y)$?

(ג) מצא את המרחק (הקטן ביותר) בין העקומות: $\{y=x^2+c,\ z=0\}$, $\{z=ax,\ y=0\}$.

(7) (א) מצאו את נקודות min/max של $f(x,y)$ מעל תחום $\mathcal{D}$

i. $f(x,y)=3-(x-1)^2-(y+1)^2$, $\mathcal{D}=\{x^2+y^2-2x+2y\leq -1\}\subset\mathbb{R}^2$,

ii. $f(x,y)=sin(x)-sin(y)$, $\mathcal{D}=\{|x|+|y|\leq 1\}\subset\mathbb{R}^2$.

(ב) מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין נקודה P לעקום C: i. $P=(0,1)$, $C=\{y^2+x^2-2x=-1\}\subset\mathbb{R}^2$,
ii. $P=(0,0)$, $C=\{x^4+y^4=1\}\subset\mathbb{R}^2$