חדו"א2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2014. תרגיל בית מס' 7.3 .

(1) (א) תהי $f(x,y)=\begin{cases}\frac{ln|\frac{x}{y}|}{x-y}, & y\neq x\\ g(x), & y=x\end{cases}$. באילו נקודות x ניתן להגדיר $g(x)$ כך ש $f(x,y)$ תהיה רציפה (בנקודות אלו)? בעלת נגזרות חלקיות (מסדר ראשון)? גזירה(=דיפרנציאבילית)?

(ב) אותו דבר עבור $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{sin(x+y+z)-sin(x+y-z)}{z}, & z\neq 0\\ g(x,y), & z=0\end{cases}$.

(2) מצאו את כל הנקודות בהן נגזרת כוונית של פונקציה $f(x,y)=sin(x)^2+cos(y)^2$ בכוון $(2,1)$ מקבלת את הערך הקטן ביותר.

(3) (א) תהי $f(x,y,z)=arcsin(\sqrt{\frac{xz}{y^2}})$. הוכיחו כי $x\partial_x f+y\partial_y f+z\partial_z f$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע הזה. מצאו את הכוון של העליה התלולה (החדה) ביותר ואת הכוון של הירידה התלולה (החדה) ביותר של $f(x,y,z)$ בנקודה $(3,4,5)$.

(ב) תהי $f(x,y)=ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+x^2-2y^2$. הוכיחו כי $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע הזה.

(4) (א) מצאו ומיינו את כל נקודות קיצון של פונקציה $f(x,y)=sin(x)cos(y)$.

(ב) תהי $f(x,y)=g_1(x)+g_2(y)$. הוכיחו כי (x_0,y_0) היא נקודת max של $f(x,y)$ אמ"ם x_0 היא נקודות max של $g_1(x)$ ו y_0 היא נקודות max של $g_2(y)$. נסחו והוכיחו טענות דומות לגבי נקודת min ונקודות אוכף.

(5) (א) רשמו פיתוח טיילור עד סדר שלישי בנקודה $(0,0)$:

i. $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y}$, ii. $f(x,y)=cos(x^2+y^2)$,

iii. $f(x,y)=ln(1+2x+y)$, iv. $f(x,y)=sin(x)cos(y)$

(ב) פתחו לטור טיילור $arctan(x^3)$ בנקודה $x=0$ ומצאו את תחום ההתכנסות של הטור.

(6) מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של f בתחום $\mathcal{D}$ עבור i. $f(x,y)=xy$, $\mathcal{D}=\{|x|^a+|y|^a\leq 1\}$, $a>0$,

ii. $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$, $\mathcal{D}=\{x\geq 0,\ y\geq 0,\ 3y^2\geq 2x^3,\ 3x^2\geq 2y^3\}$.

iii. $f(x,y)=3-(x-1)^2-(y+1)^2$, $\{x^2+y^2-2x+2y\leq -1\}$,

iv. $f(x,y)=sin(x)-sin(y)$, $\{|x|+|y|\leq 1\}$,

v. $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$, $\mathcal{D}=\{|z|\leq 1,\ x^2+y^2\leq 1\}$.

vi. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $\mathcal{D}=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}$. $(a>b>c>0)$

(7) מצאו את הנקודה/ות על משטח $S=\{x^ay^bz^c=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$, $a,b,c>0$ הקרובה/ות ביותר לראשית הצירים.