חדו"א2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2014. תרגיל בית מס' 8.2.

(1) (א) ציירו את תחום האינטגרציה והחליפו את סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים

i. $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+2} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2-2x} f(x,y)dy$, ii. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2x} f(x,y)dx + \int_{1}^{5} dx \int_{0}^{\sqrt{5-x}} f(x,y)dx$,

iii. $\int_{-1}^{1} dy \int_{arcsin(y)}^{\pi - arcsin(y)} f(x,y)dx$.

(ב) החליפו את סדר אהינטגרציה וחשבו את האינטגרלים הבאים

i. $\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt[4]{1-y^4}}^{\sqrt[4]{1-y^4}} ye^{x^2}dx$, ii. $\int_{1}^{e} dx \int_{0}^{ln(x)} \frac{dy}{e^y+1}$, iii. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{arccos(y)} \frac{dx}{sin(x)+10}$

(2) (א) מצאו את החלפת קואורדינטות, $(x,y) \to (s,t)$, אשר מעבירה את התחומים הבאים למלבן. ציירו את התחומים בצירי קואורדינטות החדשים. בכל אחד מהמקרים בדקו כי ההעתקה הפיכה וחשבו את מהיעקוביאן.

i. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x \le y \le x+1, \\ -x \le y \le 1-x \end{array} \right\}$, ii. $\mathcal{D} = \{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \}$, iii. $\mathcal{D} = \{ (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 3 \}$,

iv. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \le y \le x^2+1, \\ 0 \le x \le 2 \end{array} \right\}$, v. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \le y \le 2x^2, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x} \end{array} \right\}$.

(ב) חשבו את האינטגרלים הבאים

i. $\iint\limits_{\left\{ \substack{1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \le y \le x\sqrt{3}} \right\}} arctan\frac{y}{x} dxdy$, ii. $\iint\limits_{\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, iii. $\iint\limits_{\left\{ \substack{x \le y \le 2x, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}} \right\}} x^2y^2 dxdy$,

iv. $\iint\limits_{\left\{ \substack{x^2 \le y \le 2x^2, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}} \right\}} xydxdy$, v. $\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$, vi. $\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{sin(\sqrt{x^2+y^2})dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(האם פונקציה $\frac{sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ רציפה וחסומה בתחום האינטגרציה?)

(3) בהינתן החלפת משתנים $(x,y) \to (s(x,y), t(x,y))$ וההחלפה הפוכה $(s,t) \to (x(s,t), y(s,t))$, הוכיחו: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \mathbb{I}_{2\times 2}$.

(4) מצאו את שטח התחומים החסומים ע"י עקומות הבאות

i. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, ii. $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$, iii. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, iv. $|2x-y| + |2y-x| = 1$,

v. $\left\{ \begin{array}{l} ay \le x^2 \le by, \\ cx \le y^2 \le dx \end{array} \right\}$ (כאן: $0 < a < b,\ 0 < c < d$), vi. $\sqrt{x^2+y^2} = |sin(n \cdot arctan\frac{y}{x})|$, $n \in \mathbb{N}$

(רמז: כדאי לעבור לקוטביות ולוודא כי התחום הוא פרח בעל $2n$ עלי כותרת.)

תשובות

(1) (א) i. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{\frac{2-y}{2}} f dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-2}^{\frac{2-y}{2}} f dx$, ii. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{5-y^2} f dx$, iii. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dx \int\limits_{-1}^{sin(x)} f dy$

(ב) i. 0, ii. $e(1+ln(2))-(e+1)ln(e+1)$, iii. $ln\frac{11}{10}$

(2) (א)

(ב) i. $\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{16})$, ii. $\frac{2}{3}\pi ab$, iii. 7, iv. $2\pi(1-cos(r))$

(3)

(4) i. $\iint\limits_{r^2\leq 2a^2cos(2\phi)} rdrd\phi$, ii. $\iint\limits_{r\leq 2acos^3(\phi)} rdrd\phi$, iii. $x=rcos^3(\phi)$, $y=rsin^3(\phi)$,

iv. $s=2x-y$, $t=2y-x$, v. $s=\frac{x^2}{y}$, $t=\frac{y^2}{x}$, $Area=\iint\limits_{\substack{a\leq s\leq b\\ c\leq t\leq d}} 5dsdt$

vi. $$Area=\iint\limits_{r\leq|sin(n\phi)|} rdrd\phi = 2n\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} d\phi \int\limits_0^{sin(n\phi)} rdr = n\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} d\phi \frac{1-cos(2n\phi)}{2} = \frac{\pi}{2}$$