תרגול 8
אינטגרל כפול

1. חשב את האינטגרלים:

א) $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy$　　ב) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy$　　ג) $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{a} r^2\sin^2\theta\, dr$

2. חשב את האינטגרל $\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy$ כאשר $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$

3. באינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה:

א. כאשר D משולש בעל הקודקודים $O(0,0)\,,A(1,0)\,,B(1,1)$

ב. כאשר D משולש בעל הקודקודים $O(0,0)\,,A(2,1)\,,B(-2,1)$

ג. כאשר D טרפז בעל הקודקודים $O(0,0)\,,A(1,0)\,,B(1,2)\,,C(0,1)$

ד. כאשר D עיגול $x^2+y^2\le 1$

ה. כאשר D עיגול $x^2+y^2\le y$

ו. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\}$

ז. כאשר D טבעת $1\le x^2+y^2\le 4$

ח. כאשר D הוא התחום החסום על ידי הקווים $x=-0.5\,,x=-2\,,y=-x\,,xy=-1$

ט. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 2, y\le x^2, 0\le x\le 2\,,\,y\ge -2\}$

י. כאשר D הוא תחום משותף של העיגול $(x-2)^2+(y-3)^2\le 1$ והמשולש בעל הקודקודים $O(0,0)\,,A(0,4)\,,B(4,0)$

כ. כאשר D הוא תחום משותף של העיגול $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ והמשולש בעל הקודקודים $O(0,0)\,,A(0,2+\sqrt{2})\,,B(2+\sqrt{2},0)$

ל. כאשר D הוא תחום משותף של העיגול $x^2+y^2\le 10$ והמשולש בעל הקודקודים $A(-3,4)\,,B(-3,-4),\,C(5,0)$

4. החלף סדר האינטגרציה באינטגרלים הכפולים:

א) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$　　ב) $\int_{-6}^2 dx\int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x,y)dy$　　ג) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$　　ד) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$

ה) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$　　ו) $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy\quad (a>0)$　　ז) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$

5. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\iint_D xy^2\,dx\,dy$ כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$

ב. $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$ כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של המעגל בעל הרדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

ג. $\iint_D |xy|\,dx\,dy$ כאשר D עיגול בעל הרדיוס a $(a>0)$ שמרכזו בראשית.

ד. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x\,,\,y=x+a\,,\,y=a,\,y=3a,\,(a>0)$.

6. באינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ עבור לקואורדינאטות קוטביות והצב את הגבולות האינטגרציה :

א. כאשר D עיגול $x^2+y^2\le a^2$, $(a>0)$

ב. כאשר D עיגול $x^2+y^2\le ax$, $(a>0)$

ג. כאשר D טבעת $a^2\le x^2+y^2\le b^2$, $(0<a<b)$

ד. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1-x\}$

ה. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,(x^2/a)\le y\le a,\,-a\le x\le a\}$, $(a>0)$

ו. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\,x\le y\le \sqrt{3}\,x\}$

7. חשב ע"י מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$a)\ \iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad b)\ \iint_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

8. חשב את האינטגרלים הבאים :

$$a)\ \iint_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy \qquad b)\ \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

$c)\ \iint_D xy\,dx\,dy$ כאשר D חסום ע"י $x+y=2.5,\ xy=1$

9. צייר את הגופים שנפחיהם שווים לאינטגרלים הבאים בהתאמה :

$$9.1)\ \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy \qquad 9.2)\ \iint_{\substack{0\le x+y\le 1\\ x\ge 0,\,y\ge 0}}(x+y)\,dx\,dy \qquad 9.3)\ \iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$$

$$9.4)\ \iint_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad 9.5)\ \iint_{x^2+y^2\le x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

10. חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים הבאים :

א) $x+y=2,\ x^2-4y=4$ ב) $xy=a^2,\ x+y=\frac{5}{2}a,\ (a>0)$ ג) $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ y=x\sqrt{3}$

ד) $x+y=3,\ y^2=4x$ ה) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=x,\ y=x\sqrt{3},\ (x\ge 0)$

ו) $x^2+4y^2=16$ ז) $y^2=2x+1,\ y^2=-8x+16$

11. חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

11.1) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

11.2) $x+y+z=3,\ z=0,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$

11.3) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

12. חשב את המסה של ממברנה $D=\{(x,y)\,|\,y\le 1,\ y\ge x^2\}$ אם צפיפות הממברנה $f(x,y)=y$

תשובות

1. א) 1 ב) $1/40$ ג) $\pi a^3/3$ 2. $F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$

3.

א) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$ ב) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

ג) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

ד) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

ה) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{0.5-\sqrt{0.25-x^2}}^{0.5+\sqrt{0.25-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$ ו) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

ז) $\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

ח) $\int_{-2}^{-1} dx\int_{-1/x}^{-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^{-0.5} dx\int_{-x}^{-1/x} f(x,y)dy=$

$$=\int_1^2 dy\int_{-2}^{-y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-1/y}^{-0.5} f(x,y)dx+\int_{0.5}^1 dy\int_{-2}^{-1/y} f(x,y)dx+\int_{0.5}^1 dy\int_{-y}^{-0.5} f(x,y)dx$$

ט) $\int_0^1 dx\int_{-2}^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{-2}^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx+\int_{-2}^0 dy\int_0^2 f(x,y)dx$

י) $\int_1^2 dx\int_{3-\sqrt{4x-x^2-3}}^{4-x} f(x,y)dy=\int_2^3 dy\int_{2-\sqrt{6y-y^2-8}}^{4-y} f(x,y)dx$

כ) $\int_0^1 dx\int_0^{1+\sqrt{1+2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2+\sqrt{2}-x} f(x,y)dy+\int_2^{1+\sqrt{2}} dx\int_{1-\sqrt{1+2x-x^2}}^{2+\sqrt{2}-x} f(x,y)dy$

ל) $\int_{-3}^{-1} dx\int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^3 dx\int_{(x-5)/2}^{(5-x)/2} f(x,y)dy+\int_3^{\sqrt{10}} dx\int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} f(x,y)dy$

4.

א) $\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$ ב) $\int_{-1}^0 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

ג) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$ ד) $\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$ ה) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

ו) $\int_a^{2a} dy\int_{y^2/(2a)}^{2a} f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{y^2/(2a)}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx$ ז) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

5. א) $32/21$ ב) $8-\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ ג) $\dfrac{a^4}{2}$ ד) $14a^4$

6.

א) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ ב) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

ג) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ ד) $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/(\cos\theta+\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

ה) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

ו) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2/\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

7. a) $2\pi a^3/3$ b) $-6\pi^2$ 8. a) $4/3$ b) $2\pi ab/3$ c) $1\dfrac{37}{128}-\ln 2$

10. א) $64/3$ ב) $a^2\left(\dfrac{15}{8}-2\ln 2\right)$ ג) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ד) $64/3$ ה) $\pi/8$ ו) 8π ז) $20/3$

11.1. $5/6$ 11.2. $\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$ 11.3. $88/105$ 12. $m=0.8$

<u>פתרונות</u>

1. א) $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 (xy+y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (x+1/2)dx = \ldots$

ב) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 \dfrac{xy^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \dfrac{1}{3}\int_0^1 (x^4-x^7)\, dx = \ldots$

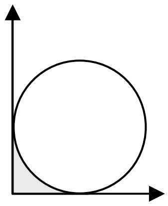
ג) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \sin^2\theta\, dr = \dfrac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \ldots$

2. $\int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy = \int_a^A dx \int_b^B \left(F'_x\right)'_y dy = \int_a^A \left(F'_x\Big|_{y=b}^{y=B}\right)dx = \int_a^A \left(F'_x(x,B)-F'_x(x,b)\right)dx = \ldots$

5. א) $\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/4}^{1} xy^2\,dx$

ב) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4x-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{4-x}} =$

$= \int\limits_0^2 \frac{2-\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{4-x}}\,dx = \int\limits_0^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{4-x}} - \int\limits_0^2 \sqrt{x}dx$

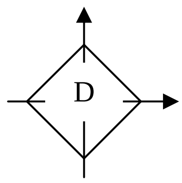


ג) $\iint\limits_D |\,x\,y\,|\;dx\,dy = 4\int\limits_0^a x dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy$

ד) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\;dx\,dy = \int\limits_a^{3a} dy \int\limits_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx$

7. א) $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\;dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^a r\,r\,dr$

ב) $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\;dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr$



8. a) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (\,|\,x\,|+|\,y\,|)\,dx\,dy = 4 \iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,\,y\ge 0}} (\,x+y\,)\,dx\,dy = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (\,x+y\,)dy$

b) $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\;dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\;a\,b\,r\,dr$

$x = a\,r\cos\theta,\; y = b\,r\sin\theta$

10. א) $S = \int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} dy$ ב) $S = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int\limits_{\frac{a^2}{x}}^{2.5a-x} dy$

ג) $S = \int\limits_0^{\pi/3} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} r\,d r$ ד) $S = \int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx$

11.1. $V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1+x+y)dy$

11.2. $V = \iint\limits_D (3-x-y)dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 (3-r\cos\theta-r\sin\theta)\,r\,dr$

11.3. $V = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2+y^2)dy$ 12. $m = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} y\,dy$