

חזר"א 2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2014. תרגיל בית מס' 9.2.

(א) ציירו את תחום האינטגרציה והחליפו את סדר האינטגרציה במקרים הבאים: i. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$

ii. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$

(ב) החליפו את סדר האינטגרציה כך שתתאפשר אינטגרציה פנימית ובסוף יישאר אינטגרל רגיל (במשתנה אחד)

i. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} dy \int_{y^4}^{\sqrt[4]{y}} f(z) dz$ ii. $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}} dy \int_{\frac{\pi}{2}-x^2-y^2}^{\cos(x^2+y^2)} f(z) dz$

(2) ציירו את הגופים הבאים וחשבו את הנפחים שלהם. תנסו לפתור את השאלות בכמה שיותר דרכים שונות (כדוריות, גליליות, ..., ע"י מעבר לאינטגרל חוזר)

i. $V = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + \frac{3}{4} \end{array} \right\}$ ii. $V = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ iii. $V = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq ax^2 + by^2 \\ x^2 + y^2 \leq 3 \end{array} \right\}$

iv. $V = \left\{ \begin{array}{l} z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq ax^2 + ay^2 \end{array} \right\}$ v. $V = \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{array} \right\}$ $a > 1$

vi. $V = \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1 \\ 0 \leq x, y, z \leq 1 \end{array} \right\}$ vii. $V = \{ a(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \}$ $a > 0$

viii. $V = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq x \end{array} \right\}$ ix. $V = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0 \leq z \leq xy \end{array} \right\}$ x. $V = \{ |x| + |y| + |z| \leq 1 \}$

$u = x + 2y + 3z,$

xi. $V = \{ |x + 2y + 3z| + |2x + 3y + z| + |3x + y + 2z| \leq 1 \}$ (רמז: $v = 2x + 3y + z,$

$w = 3x + y + 2z$)

(3) חשבו את האינטגרלים

i. $\iiint_{0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 4} (z + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ ii. $\iiint_V zye^{x+y^2} dx dy dz$ $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ \frac{\pi}{3} \leq z \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{y^2}{4} \leq z \leq y^2 \end{array} \right\}$

iii. $\iiint_{\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \leq 1} xyz dx dy dz$ (רמז: $z = w^4 c, y = v^4 b, x = u^4 a$)

תשובות

$$\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} dx f(x, y, z) \text{ .i (א) (1)}$$

$$\int_0^1 dz \int_{z^4}^{\sqrt[4]{z}} dy \int_{y^3}^{\sqrt[3]{y}} dx f(z) = \int_0^1 \left(\frac{z^{16}-z}{4} + \frac{\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{z^{16}}}{4/3} \right) f(z) dz \text{ .i (ב)}$$

$$\iiint f(z) r dr d\phi dz = \pi \iint_{\substack{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\frac{\pi}{2}-t}{2} \leq z \leq \cos(t)}} f(z) dt dz \text{ .ii}$$

שימו לב כי: $\cos(t) \geq \frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}$ עבור $t \in [0, 1]$ לכן האינטגרל:

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(z) dz \int_{\frac{\pi}{2}-2z}^{\arccos(z)} dt + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^1 f(z) dz \int_0^{\arccos(z)} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(z) \left(\arccos(z) - \frac{\pi}{2} + 2z \right) dz + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^1 f(z) \arccos(z) dz \text{ (ג)}$$

$$Vol_3(V) = \iiint_{\substack{0 \leq z \leq \min(r, ar^2) \\ 0 \leq r \leq 1}} r dr d\phi dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} r dr \int_0^{ar^2} dz + 2\pi \int_{\frac{1}{a}}^1 r dr \int_0^r dz \text{ .iv (2)}$$

x. הגוף סימטרי ביחס לכל מישורי קואורדינטות, לכן מספיק לחשב רק את הנפח של חלק שלו:

$\{0 \leq x + y + z \leq 1, 0 \leq x, y, z\}$. זאת פירמידה עם זוויות ישרות וצלעות באורך 1. לכן הנפח שלה: $\frac{1}{6}$. לכן הנפח של הגוף כולו: $\frac{8}{6}$.

$$V = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ 2z \leq x \leq 3z \\ z \leq y^2 \leq 4z \end{array} \right\} \text{ .ii (3)}$$