

אינטגרל משולש

I. חשב את האינטגרלים המשולשים :

$$1. \iiint_T (2x - y + 3z) dx dy dz$$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$

$$2. \iiint_T z^2 e^{x+y} dx dy dz$$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$

$$3. \iiint_T y \cos(z + x) dx dy dz$$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \pi/2$

$$4. \iiint_T xy^2 z^3 dx dy dz$$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $z = xy, z = 0, y = x, x = 1$

$$5. \iiint_T \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x + y + z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$

II. חשב את נפח הגופים חסומים ע"י המשטחים הנתונים :

$$1. z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$$

$$2. y = x^2, y = 1, x + y + z = 3, z = 0$$

III.

1. חשב את המסה של גוף T החסום ע"י המשטחים $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 3, z = 1$

אם צפיפות $f(x, y, z) = x + y + z$

2. חשב את המסה של גוף T החסום ע"י המשטחים $x^2 = 2y, y + z = 1, 2y + z = 2$

אם צפיפות $f(x, y, z) = y$

קואורדינטות גליליות וכדוריות

מערכת קואורדינטות גליליות (r, θ, z) : $z = z, y = r \sin \theta, x = r \cos \theta$

מערכת קואורדינטות כדוריות (ρ, θ, φ) : $z = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, x = \rho \cos \theta \sin \varphi$

IV. רשום את קואורדינטות גליליות, כדוריות וקרטיזיות של נקודות :

	(x, y, z)	(r, θ, z)	(ρ, θ, φ)
1	(0, 1, 0)		
2		(1, 0, 0)	
3		(1, $\pi/2$, 1)	
4			$(2\sqrt{2}, -\pi/2, \pi/2)$
5	(-1, 0, -1)		

V. ב R^3 תאר את האוסף הנקודות המקיימות את המשוואות הבאות, כלומר קבע איזו צורה גיאומטרית מייצגת המשוואה. הסבר.

1. $r = 2$ 2. $\varphi = \pi/4$ 3. $\rho = 3$ 4. $\theta = 0$ 5. $\varphi = \pi$ 6. $z = r$ 7. $z = r^2$

8. $\begin{cases} r = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \rho = 5 \\ z = 5 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \rho = 5 \\ \varphi = 0.8\pi \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \pi \end{cases}$

VI. ב R^3 תאר את האוסף הנקודות המקיימות את המשוואות הבאות ותציג את האוסף של הנקודות בשתי מערכות הקואורדינטות האחרות (גליליות, כדוריות וקרטיזיות)

1. $r = 2 \cos \theta$ 2. $\rho = 2 \cos \varphi$ 3. $z = 0$ 4. $r = 4$ 5. $\rho \cos \theta \sin \varphi = 3$

6. $2x + 3y + 5z = 11$ 7. $z = r^2$ 8. $\varphi = \pi/4$ 9. $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$

10. $4r^2 + 9z^2 = 36$ 11. $z = 10$ 12. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ 13. $x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

VII. חשב את האינטגרלים המשולשים :

1. $\iiint_T x y z \, dx \, dy \, dz$ כאשר התחום T חסום ע"י

המשטחים $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0, x = 0, y = 0$

2. $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$

3. $\iiint_T x^2 \, dx \, dy \, dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

4. $\iiint_T z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ כאשר $\{x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 3\} = T$

5. $\iiint_T \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטח $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

6. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 \, dz$

VIII. חשב את נפח הגופים חסומים ע"י המשטחים הנתונים :

1. $z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $3z = x^2 + y^2, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

4. $2z = x^2 + y^2, z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

5. $2z = x^2 + y^2 + z^2$

IX. חשב את המסה של גוף T החסום ע"י המשטחים $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3$ אם

צפיפות $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

תשובות

I. 1) 27 2) $\frac{1}{3}(e-1)^2$ 3) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{364}$ 5) $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$

II. 1) $V = \frac{3}{35}$ 2) $V = \frac{16}{5}$ III. 1) $m = 18$ 2) $m = \frac{8\sqrt{2}}{35}$

IV.

	(x, y, z)	(r, θ, z)	(ρ, θ, φ)
1	(0, 1, 0)	(1, $\pi/2$, 0)	(1, $\pi/2$, $\pi/2$)
2	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, $\pi/2$)
3	(0, 1, 1)	(1, $\pi/2$, 1)	($\sqrt{2}$, $\pi/2$, $\pi/4$)
4	(0, $-2\sqrt{2}$, 0)	($2\sqrt{2}$, $-\pi/2$, 0)	($2\sqrt{2}$, $-\pi/2$, $\pi/2$)
5	(-1, 0, -1)	(1, π , -1)	($\sqrt{2}$, π , $3\pi/4$)

V. 1) גליל (2) חצי חרוט (3) כדור (4) חצי מישור (5) קרן (6) חצי חרוט (7) פרבולויד (8) מעגל (9) נקודה (10) קרן (11) מעגל (12) חצי מעגל

VI.

	(x, y, z)	(r, θ, z)	(ρ, θ, φ)
1	$x^2 + y^2 = 2x$	$r = 2 \cos \theta$	$\rho = 2 \cos \theta / \sin \varphi$
2	$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$	$r = \sqrt{2z - z^2}$	$\rho = 2 \cos \varphi$
3	$z = 0$	$z = 0$	$\varphi = \pi / 2$
4	$x^2 + y^2 = 16$	$r = 4$	$\rho \sin \varphi = 4$
5	$x = 3$	$r \cos \theta = 3$	$\rho \cos \theta \sin \varphi = 3$
6	$2x + 3y + 5z = 11$	$z = \frac{11 - r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta)}{5}$	$\rho = \frac{11}{(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) \sin \varphi + 5 \cos \varphi}$
7	$z = x^2 + y^2$	$r = \sqrt{z}$	$\rho = \cos \varphi / \sin^2 \varphi$
8	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = r$	$\varphi = \pi / 4$
9	$x^2 + y^2 + z^2 = 4y$	$z^2 = 4r \sin \theta - r^2$	$\rho = 4 \sin \theta \sin \varphi$
10	$\frac{x^2 + y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$	$r = \frac{\sqrt{36 - 9z^2}}{2}$	$\rho = \frac{6}{\sqrt{1 + 5 \cos^2 \varphi}}$
11	$z = 10$	$z = 10$	$\rho = 10 / \cos \varphi$
12	$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$	$r = \sqrt{1 + 4z^2}$	$\rho = 1 / \sqrt{1 - 5 \cos^2 \varphi}$
13	$x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$	$r = \sqrt{4z^2 - 1}$	$\rho = 1 / \sqrt{5 \cos^2 \varphi - 1}$

VII. 1) $\frac{1}{48}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{324\pi}{5}$ 4) 8 5) $\frac{4abc\pi}{5}$ 6) $\frac{\pi(2\sqrt{2} - 1)}{15}$

VIII. 1) $V = \frac{\pi}{6}$ 2) $V = \frac{32}{3}\pi$ 3) $V = \frac{19}{6}\pi$ 4) $V = \frac{\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5)$

IX. $m = 24\pi$

פתרונות

I. 4) $\iiint_T xy^2 z^3 dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{xy} x y^2 z^3 dz = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^6 dy$

5) $\iiint_T \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy$

II. 1) $V = \iiint_T dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy$

2) $V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{3-x-y} dz$

III. 1) $m = \iiint_T (x+y+z) dx dy dz$

VII. 1) $\iiint_T x y z dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho \sin \varphi \cos \theta) (\rho \sin \varphi \sin \theta) (\rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho$

2) $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 r dz$