## <u>בוחן 1</u> חדו"א 2 מכונות 01.05.2014

1. (א) (15) מצאו את תחום ההתכנסות של $\sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{n^3}}{n!}$ . בדקו איפה התכנסות היא בהחלט/בתנאי.

(ב) (10) פתחו את הפונקציה $f(x)=\ln\frac{1}{6-5x+x^2}$ לטור טיילור (מסביב לנקודה $x=0$). מצאו את תחום ההתכנסות של הטור, בדקו איפה התכנסות היא בהחלט/בתנאי.

<u>פתרון</u> א)

$$\sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{n^3}}{n!}=\sum_{n=10}^{\infty}u_n\,,\quad \sum_{n=10}^{\infty}\frac{|x+1|^{n^3}}{n!}=\sum_{n=10}^{\infty}|u_n|\,,\quad u_n=(-1)^n\frac{(x+1)^{n^3}}{n!}$$

נתבונן בטור $\sum_{n=10}^{\infty}|u_n|$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{|x+1|^{(n+1)^3}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x+1|^{n^3}}\right|=\frac{|x+1|^{(n+1)^3-n^3}}{n+1}=\frac{|x+1|^{3n^2+3n+1}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{3n^2+3n+1}}{n+1}=\begin{cases}0, & |x+1|\le 1\\ \infty, & |x+1|>1\end{cases}$$

<u>הערות</u>

1. אם $|q|=|x+1|<1$ אז $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ , לכן $\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{3n^2+3n+1}}{n+1}=0$

2. אם $|x+1|=1$ אז $0\le\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{3n^2+3n+1}}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

3. אם $|q|=|x+1|>1$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{q^{3n^2+3n+1}}{n+1}=\infty$ כי

$$\frac{q^{3n^2+3n+1}}{n+1}>\frac{q^{3n+1}}{n+1}>\frac{q^{n+1}}{n+1},\qquad \lim_{y\to\infty}\frac{q^y}{y}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{y\to\infty}\frac{q^y\ln q}{1}=\ln q\lim_{y\to\infty}q^y=\infty$$

הטור $\sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{n^3}}{n!}$ מתכנס בהחלט אם $|x+1|\le 1$ או $-2\le x\le 0$

אם $|x+1|>1$ אז $\lim_{x\to\infty}|u_n|\ne 0$ ולכן הטור מתבדר

ב)

$$6-5x+x^2=(x-2)(x-3)=(2-x)(3-x)=6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

אם $x$ בסביבה של אפס אז $1-\frac{x}{3}>0\,,1-\frac{x}{2}>0$ ולכן פונקציות $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right),\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$ מוגדרות וגזירות אינסוף פעמים בסביבה של אפס.

$$\ln\frac{1}{6-5x+x^2}=-\ln\left(6-5x+x^2\right)=-\ln 6-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ -1<x\le 1$$

$$\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n},\quad -1\le\frac{x}{2}<1,\quad x\in[-2,2)\qquad \ln\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n},\ x\in[-3,3)$$

$$\ln\frac{1}{6-5x+x^2}=-\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}=-\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n},\ -2\le x<2$$

<u>הערה</u>

אם בנקודה $x_0$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ מתבדר אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x_0^n$ מתבדר.

תשובה : בקטע $-2<x<2$ הטור מתכנס בהחלט, ב $x=2$ הטור מתכנס בתנאי אחרת מתבדר

.<u>2</u>

(א) (10) עבור איזה ערך של $a$ הנקודות $A=(-1,2,1)$, $B=(0,1,-5)$, $C=(1,2,-1)$, $D=(-2,1,a)$ נמצאות באותו מישור?

(ב) (15) נתונים המישורים $L_1=\{3x-4y+2z=-1\}$, $L_2=\{4x-5y+3z=2\}$. מצאו את משוואת המישור $L_3$ העובר דרך ראשית הצירים ומאונך ל $L_1$, $L_2$. מצאו את נקודת החיתוך של שלושת המישורים האלה.

<u>פתרון</u> . א) אם נקודות $D,C,B,A$ באותו מישור אז וקטורים

$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-6),\overrightarrow{AC}=(2,0,-2),\overrightarrow{AD}=(-1,-1,a-1)$ תלוים לינארית

$$\begin{pmatrix}1&-1&-6\\2&0&-2\\-1&-1&a-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6\\0&2&10\\0&-2&a-7\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6\\0&2&10\\0&0&a+3\end{pmatrix}\Rightarrow a=-3$$

או בדרך אחרת $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=0$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}1&-1&-6\\2&0&-2\\-1&-1&a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-5\\2&0&0\\-1&-1&a-2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1&-5\\-1&a-2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1&-5\\0&a+3\end{vmatrix}$$

נקודות $D,C,B,A$ באותו מישור אם $a=-3$

ב)

נורמל למישור ראשון הוא וקטור $\vec{n}_1=(3,-4,2)$ ולמישור שני $\vec{n}_2=(4,-5,3)$. ורטורים $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ מקבילים למישור שלישי ו $\vec{n}_1\not\parallel\vec{n}_2$ לכן וקטור $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ ניצב למישור שלישי

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-4&2\\4&-5&3\end{vmatrix}=(-2,-1,1)$$ . המישור שלישי הינו $2x+y-z=0$.

נמצא את נקורת החיתוך המישורים

$$\begin{cases}3x-4y+2z=-1\\4x-5y+3z=2\\2x+y-z=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&2&-1\\4&-5&3&2\\2&1&-1&0\end{array}\right)\xRightarrow{R_2-R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&2&-1\\1&-1&1&3\\2&1&-1&0\end{array}\right)\xRightarrow{R_3+R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&2&-1\\3&0&0&3\\2&1&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\ldots$$

$(x,y,z)=(1,4,6)$

3. (א) (12) מיינו/תארו/ציירו את משטחי רמה של $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}}$ .

(ב) (13) בדקו את ההתכנסות של $\sum\limits_{n=100}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+10)\ln n}-\dfrac{1}{\ln^n n}\right)$ .

<u>פתרון</u> . א)

משטחי רמה של $f\left(x,y,z\right)$ : $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}}=c\geq 0$ הם $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}=c^2$

1. $c=0\Rightarrow x^2+y^2=0\Rightarrow x=y=0$

$f\left(x,y,z\right)=0$ על ציר Z כאשר $z\neq 0$

2. $c>0\Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}=c^2\Rightarrow x^2+y^2=c^2\left(x^2+z^2\right)\Rightarrow x^2\left(1-c^2\right)+y^2=c^2z^2$

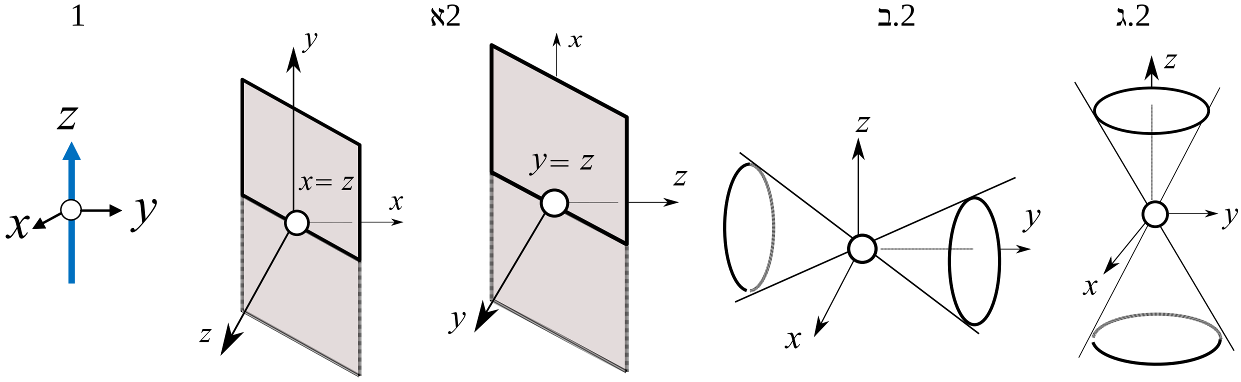
2.א. $c=1\Rightarrow y^2=z^2\Rightarrow z=\pm y$ משטחי רמה מישורים $z=\pm y$

$f\left(x,y,z\right)=1$ על המישור $z=y$ , $\left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)$ וגם על המישור $z=-y$ , $\left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)$

2.ב. $\left|c\right|>1\Rightarrow y^2=c^2z^2+x^2\left(c^2-1\right)$ חרוט אליפטי עם ציר $y$ בלי $\left(x,y,z\right)=\left(0,0,0\right)$

2.ג. $\left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)$ , $\left|c\right|<1\Rightarrow x^2\left(1-c^2\right)+y^2=c^2z^2$ חרוט אליפטי עם ציר $z$ בלי $\left(x,y,z\right)=\left(0,0,0\right)$

1    2א    2.ב    2.ג




ב. $\sum\limits_{n=100}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+10)\ln n}-\dfrac{1}{\ln^n n}\right)=\sum\limits_{n=100}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=100}^{\infty}\left(b_n-c_n\right)$

נתבונן בטור $\sum\limits_{n=100}^{\infty}\dfrac{1}{(n+10)\ln n}=\sum\limits_{n=100}^{\infty}b_n$

פונ' $\dfrac{1}{x\ln x}$ מונוטונית יורדת בקטע $[110,\infty)$ ו $\int\limits_{110}^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}=\infty$ לכן הטור

$\sum\limits_{n=100}^{\infty}\dfrac{1}{(n+10)\ln(n+10)}=\sum\limits_{n=110}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ מתבדר.

אבל $\frac{1}{(n+10)\ln(n+10)} > \frac{1}{(n+10)\ln n} = b_n$ לכן גם טור $\sum_{n=100}^{\infty} b_n = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{(n+10)\ln n}$ מתבדר.

נתבונן בטור $\sum_{n=100}^{\infty} c_n = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ לכן הטור $\sum_{n=100}^{\infty} c_n$ מתכנס.

הטור $\sum_{n=100}^{\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=100}^{\infty} a_n$ מתבדר כי טור $\sum_{n=100}^{\infty} b_n$ מתבדר והטור $\sum_{n=100}^{\infty} c_n$ מתכנס.

**4.**

תהי
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy + x^2 \sin x - 3y^2\left(e^y - 1\right)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(א) (13) האם פונקציה רציפה?

(ב) (12) האם קיימות נגזרות חלקיות $\partial_x f\big|_{(0,0)}, \partial_y f\big|_{(0,0)}$? אם כן , חשבו אותן.

<u>פתרון</u>

פונקציה $f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ כאשר $g(x,y) = \frac{xy + x^2 \sin x - 3y^2\left(e^y - 1\right)}{x^2 + y^2}$.

הפונקציה $g(x,y)$ אלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה $R^2 \setminus (0,0)$

$$g(x,y) = \frac{xy + x^2 \sin x - 3y^2\left(e^y - 1\right)}{x^2 + y^2}, \ \lim_{\substack{x\to 0 \\ k\neq 0}} g(x,kx) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{kx^2 + x^2 \sin x - 3k^2x^2\left(e^{kx} - 1\right)}{x^2\left(1+k^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{k + \sin x - 3k^2\left(e^{kx} - 1\right)}{\left(1+k^2\right)} = \frac{k}{\left(1+k^2\right)}$$

הגבול תלוי במסלול לכן אינו קיים. פונקציה $f(x,y)$ לא רציפה בנק' $(0,0)$.

הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת ב $R^2$ רציפה ב $R^2 \setminus (0,0)$ , לא רציפה ב $(0,0)$.

ב)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x^2 \sin \Delta x}{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{-3\Delta y^2\left(e^{\Delta y} - 1\right)}{\Delta y^2}}{\Delta y} = -3 \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(e^{\Delta y} - 1\right)}{\Delta y} = -3$$